

Les notes, qui ne sont pas destinées à être publiées, sont avant tout un résumé d'une partie de la théorie classique de ~~la~~ des domaines hermitiens symétriques, et accablent une mise au goût du jour (ou à mon goût personnel). Elles sont motivées par mon désir de comprendre les travaux récents de Mumford sur les compactifications des quotients des domaines hermitiens symétriques par des groupes arithmétiques.

§1. Présentation des personnages.

1.1. Rappels sur les espaces riemanniens symétriques.

(Résumé partiel de Helgason (I, II) ~~et III~~)

Un résultat préliminaire ~~et le suivant~~ ([Hel] ^{1.1.5} IV 1.2)

Théorème 1.1.1. Soient M et M' deux variétés différentiables munies de ~~des~~ connexions affines ∇, ∇' . On suppose que les tenseurs de torsion T (resp T') et de courbure R (resp R') de M (resp M') sont invariants par transport parallèle : $\nabla T = \nabla R = 0$ et $\nabla' T' = \nabla' R' = 0$. Soient $x \in M, x' \in M'$, T_x et $T_{x'}$ les espaces tangents, et $A : T_x \xrightarrow{\cong} T_{x'}$ qui envoie T et R

sur T' et R' . Il existe un germe d'isomorphisme de (M, ∇, x) avec (M', ∇', x') , de différentielle en x égale à A .

Notons $\exp_x : T_x \rightarrow M$ l'application exponentielle et \log_x son inverse. On a nécessairement

$$a(y) = \exp_x(A \log_x y)$$

que a , défini par cette formule, est un isomorphisme local de (M, ∇) avec (M', ∇') se lit sur l'écriture [Ho.] I §9 (6)(7) les équations de

(entre les "normales relatives")

Remarque 1.1.2 (i) Soit (M, ∇) tel que $\nabla T = \nabla R = 0$, et on 2

⊗ Les équations de Cartan montrent encore que la connexion $\log_x(\nabla)$ sur un voisinage de l'origine dans T_x est analytique réelle. Il existe donc sur M une et une seule structure de variété analytique réelle telle que ∇ soit analytique. Les \log_x sont des systèmes de coordonnées locales

(ii) Sous les hypothèses de 1.1.1, supposons M et M' simplement connues géodésiquement et γ complets. Par prolongement analytique de a , on obtient alors un isomorphisme global

$$\tilde{a} : (M, \nabla, a) \rightarrow (M', \nabla', a')$$

de différentielle A .

Corollaire

Proposition 1.1.3 Soit (M, ∇) tel que $\nabla T = \nabla R = 0$, simplement

connue et géodésiquement complet. Soit $\gamma(t)$ une géodésique :

$$\nabla_t \dot{\gamma}(t) = 0.$$

Il existe un ^(et un seul) groupe à un paramètre $\tau(\delta, u)$ d'automorphismes de M , qui induit sur la géodésique la translation $\gamma(t) \mapsto \gamma(t+u)$, et déplace le fibré tangent, le long de γ , par transport parallèle

Soit $\tau(\delta, u)$ l'automorphisme de M qui envoie $\gamma(0)$ sur $\gamma(u)$, et ait pour différentielle $\mathbb{T}_{\gamma} d\tau(\delta, u)|_0 : T_{\gamma(0)} \rightarrow T_{\gamma(u)}$ le transport parallèle le long de γ . Puisque $d\tau(\delta, u)(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(u)$, on a $\tau(\delta, u)(\gamma(t)) = \gamma(t+u)$. Si $X \in T_{\gamma(t)}$ est parallèle à $X_0 \in T_{\gamma(0)}$, alors $\tau(\delta, u)(X)$ est parallèle à $d\tau(\delta, u)(X_0) \parallel X_u$, d'où 1.1.3.

Récaproque 1.1.10 Soient G un groupe de Lie, et K un sous-groupe compact de G . On suppose que

- (a) $M = G/K$ est connexe
- (b) Il existe une involution σ de G telle que $\text{Lie}(K) = \text{Lie}(G)^\sigma$ et $\text{que } K = K^\sigma$

~~Cette involution est alors unique. Soient Q une forme quadratique K -invariante sur $\text{Lie}(G)/\text{Lie}(K)$ et soit γ la structure riemannienne invariante sur M valant Q à l'origine~~

Alors, M est riemannien symétrique pour toute structure riemannienne invariante Q . Si p est le sous-espace de $\text{Lie}(G)$ où $\sigma = -1$, les $\exp(\pi u)$ ~~($u \in p$)~~ sont les groupes à un paramètre d'isométries 1.1.3 relatifs aux géodésiques passant par l'origine.

$(\pi \in p)$

(i) Puisque M est homogène, il suffit de prouver l'existence d'une symétrie par rapport à l'origine. On prend $\sigma : G/K \rightarrow G/K$.

(ii) On a $\left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \right] \sigma = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp\left(-\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et on applique (1.1.3)

Remarque 1.1.8 (i). Les conditions suivantes sont équivalentes

- (a) G agit fidèlement sur M ,
- (b) K agit fidèlement sur $p = \text{Lie}(G)/\text{Lie}(K) =$ espace tangent à M à l'origine.

Si elles sont vérifiées, ~~il existe~~ σ et l'identité sur K et est uniquement déterminé par K : la forme de Killing

et non dégénérée sur $\text{Lie}(K)$, et $d\sigma$ est la réflexion par rapport à $\text{Lie}(K)$.

(ii) Se donner Q revient à se donner une ~~pp~~ structure euclidienne K -invariante Q_0 sur p . ~~(= l'espace tangent de M à l'origine)~~

\square D'après 1.1.3 et 1.1.10, la connexion riemannienne (= le transport parallèle) est indépendante du choix de Q .

1.12 Parons aux algèbres de Lie. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie (réelle), σ une involution de \mathfrak{g} et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition correspondante. On suppose \mathfrak{k} compacte dans \mathfrak{g} (\Leftrightarrow la forme de Killing < 0 sur \mathfrak{k}) et que \mathfrak{p} est une représentation fidèle de \mathfrak{k} (cf 1.11(1)). Soient $\rho \in \mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ le noyau de la forme de Killing B , et $\mathfrak{p} = \rho \oplus \bigoplus_{i \neq 0} \mathfrak{p}_i$ une décomposition de \mathfrak{p} en sous- \mathfrak{k} -représentations. On suppose que $\mathfrak{p}_i \perp \mathfrak{p}_j$ (rel. à B) (c'est en fait automatique).

a) Pour $i=0$ ou $i \neq j$, $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = 0$

En effet, puisque $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ et que B est non dégénérée sur \mathfrak{k} , il suffit de voir que $B(\mathfrak{k}, [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j]) = 0$. Or,

$$B(\mathfrak{k}, [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j]) = B([\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_i], \mathfrak{p}_j) \subset B(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = 0$$

b) Si $i \neq 0$, et que $x \in \mathfrak{k}$, $x \perp [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i]$, alors $[x, \mathfrak{p}_i] = 0$.

En effet, $B|_{\mathfrak{p}_i}$ est non dégénérée et

$$B([x, \mathfrak{p}_i], \mathfrak{p}_i) = B(x, [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i]) = 0.$$

Soient $\mathfrak{k}_i = [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i]$, \mathfrak{k}_0 l'orthogonal dans \mathfrak{k} de la somme des \mathfrak{k}_i .

et $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$. On a

c) $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ (somme directe d'algèbres de Lie)

Pour $i \neq 0$, on vérifie a priori que \mathfrak{g}_i est une sous-algèbre de Lie. \mathfrak{k}_0 est le centralisateur dans \mathfrak{k} de $\bigoplus_{i \neq 0} \mathfrak{p}_i$, donc en est une aussi. Puisque $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ est une sous-algèbre et, pour $i \neq j$, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$. Puisque \mathfrak{k} agit fidèlement sur \mathfrak{p} , on en déduit que la somme des \mathfrak{g}_i (soit \mathfrak{k}_i , donc des \mathfrak{g}_i), est directe. Pour $i \neq 0$, $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \neq 0$ (sinon $B|_{\mathfrak{p}_i} = 0$).

Il est possible, dans la décomposition de \mathfrak{p} , de prendre les \mathfrak{p}_i irréductibles : soit Q_0 une forme quadratique \mathfrak{k} -invariante

On décompose d'abord \mathfrak{g} selon les valeurs propres de l'opérateur symétrique H . Sur les composants obtenus (sauf \mathfrak{p}_0), B est défini, car multiple $\neq 0$ de Q , et on poursuit la décomposition. Dans la décomposition obtenue, on ne trouve pas parmi les \mathfrak{p}_i ($i \neq 0$) deux fois la même représentation, car les \mathfrak{p}_i ont des centralisateurs différents dans \mathfrak{k} . Ceci prouve l'automatisme de $\mathfrak{p}_i \perp \mathfrak{p}_j$ (B). Nous avons prouvé :

Théorème 1.1.13 (\mathfrak{g}, σ) admet une et une seule décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i \neq 0} \mathfrak{g}_i, \quad \text{ou}$$

- (a) \mathfrak{p}_0 est un idéal abélien de \mathfrak{g}_0 ; (cas euclidien). \mathfrak{g}_0 est produit semi-direct de \mathfrak{k}_0 et \mathfrak{p}_0 .
- (b) \mathfrak{p}_i est une représentation irréductible de \mathfrak{k}_i , $\mathfrak{k}_i \neq 0$ et $\mathfrak{k}_i = [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i]$.

par $i \neq 0$,

Par $i \neq 0$, $B|_{\mathfrak{p}_i}$ est soit définie négatif (auquel cas \mathfrak{g}_i est ~~non~~ compacte), soit définie positive (auquel cas \mathfrak{g}_i est non compacte et \mathfrak{k}_i une sous-algèbre compacte maximale)

Par la seconde assertion, notez que à un facteur près il n'y a sur \mathfrak{p}_i qu'une seule forme \mathfrak{k}_i -invariante.

1.1.14 Clarification : (a) le cas euclidien correspond à l'espace euclidien. \mathfrak{k}_0 y est une quelconque sous-algèbre de $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}_0)$.

(b) Si B est définie positive sur \mathfrak{p}_i , \mathfrak{g} est semi-simple et σ est une involution de Cartan. Si (\mathfrak{g}, σ) est indécomposable, \mathfrak{g} est simple ~~non compacte~~ et soit absolument simple, soit complexe - Réciproque -

(c) La dualité $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^{(\sigma)} = \{x \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \mid \bar{x} = \sigma(x)\}$ (σ inchangé) :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{g}^{(\sigma)} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$$

échange les cas où $B > 0$ et où $B < 0$.

(b*) Si $B < 0$, \mathfrak{g} est semi-simple compacte. Si (\mathfrak{g}, σ) est indécomposable, soit \mathfrak{g} est simple compacte, et σ une quelconque involution, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, avec \mathfrak{g}_1 simple compacte, et σ est l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$

Dans les cas (b) et (b*), les $\text{ad } \pi$ ($\pi \in \mathfrak{p}$) sont semi-simples, car π est $i\pi$ et dans l'algèbre de Lie d'un ^{groupe compact} ~~non compact~~ compact

G est une \mathbb{R} -algèbre commutative et agit fidèlement sur M . Alors,

- (i) G est la composante neutre du groupe des isométries de M , et est isomorphe à \mathbb{R} .
- (ii) Composante neutre de \mathfrak{K} est la composante neutre du groupe des automorphismes de p (identifié à l'espace tangent à l'origine), muni de \mathbb{R} , et du tenseur de courbure R .

Soient \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et \mathfrak{g}' celle du groupe des isométries de M . Appliquons 1.1.9 à \mathfrak{g} et à \mathfrak{g}' ; p est le même pour \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' (c'est l'espace tangent à l'origine), et ne contient pas

d'idéal abélien non trivial. On a donc $\mathfrak{g}' = p + [p, p] = \mathfrak{g}$. L'analogie sur \mathfrak{K} résulte de 1.1.1, ou d'un argument analogue au précédent.

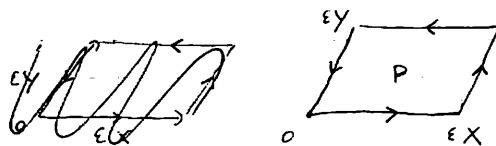
Normalisation 1.1.16. Comme dans Helgerson, on définit le tenseur de courbure par

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

(X, Y champs de vecteurs; $R(X, Y)$ champ d'endomorphisme du fibré tangent) section du fibré "algèbre de Lie du groupe linéaire du fibré tangent", identifié à $\text{End}(T)$.

Si P est le parallélogramme infinitésimal tendu par ϵ

Si X et Y sont deux vecteurs tangents en o , et que P est le parallélogramme infinitésimal tendu par ϵX et ϵY , alors $\mathcal{A}(\epsilon R(X, Y)) = 1 - R(\epsilon X, \epsilon Y)$ est l'automorphisme infinitésimal du fibré tangent en o obtenu par transport parallèle le long de ∂P (mod ϵ^3)



Proposition 1.1.17 Pour $X, Y \in p$,

$$R(X, Y)(Z) = -[[X, Y], Z]$$

Puisque $[X, Y] \in \mathfrak{K}$, le quadrilatère à côtés géodésiques

$$\exp(uX) \cdot o, \exp(\epsilon X) \exp(uY) \exp(-\epsilon X) \cdot o, (\exp(\epsilon X) \cdot \exp(\epsilon Y)) \exp(uX) (\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y))^{-1},$$

$$(\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y) \exp(-\epsilon X)) \exp(-uY) (\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y) \exp(-\epsilon X)) \quad (0 \leq u \leq \epsilon)$$

se referme (mod ϵ^3). D'après 1.1.6, 1.1.1, on a

$$(1 - R(\epsilon X, \epsilon Y))(Z) = d(\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y) \exp(-\epsilon X) \exp(-\epsilon Y))(Z)$$

$$= d(\exp([\epsilon X, \epsilon Y]))(Z) = Z + [[\epsilon X, \epsilon Y], Z] \quad (\text{mod } \epsilon^3)$$

Sont \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et \mathfrak{g}' celle du groupe des isométries de M .
 Appliquons 1.1.9 à \mathfrak{g} et à \mathfrak{g}' ;
 \mathfrak{p} est le même pour \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' (c'est l'espace tangent à l'origine), et ne contient pas

d'idéal abélien non trivial. On a donc $\mathfrak{g}' = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{g}$. L'analogie au \mathbb{K}
 résulte de 1.1.1, ou d'un argument analogue au précédent.

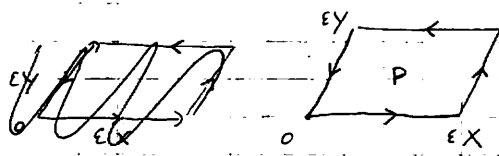
Normalisation 1.1.16. Comme dans Helgason, on définit le tenseur de courbure par

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

(X, Y) champs de vecteurs; $R(X, Y)$ champ d'endomorphisme du fibré tangent, section
 du fibré "algèbre de Lie du groupe linéaire du fibré tangent \mathcal{G} ", identifié à $\text{End}(\mathcal{G})$.

Si P est le parallélogramme infinitésimal tendu par ϵ

Si X et Y sont deux vecteurs tangents en o , et que P est le parallélogramme
 infinitésimal tendu par ϵX et ϵY , alors $1 + \epsilon R(X, Y) + o(\epsilon^3)$
 est l'automorphisme infinitésimal du fibré tangent en o obtenu par
 transport parallèle le long de ∂P (mod ϵ^3)



Proposition 1.1.17 Pour $X, Y \in \mathfrak{p}$,

$$R(X, Y)(Z) = -[[X, Y], Z]$$

Puisque $[X, Y] \in \mathfrak{k}$, le quadrilatère à côtés géodésiques

$\exp(uX) \cdot o, \exp(\epsilon X) \exp(uY) \exp(-\epsilon X) \cdot o, (\exp(\epsilon X) \cdot \exp(\epsilon Y)) \exp(-uX) (\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y))^{-1},$
 $(\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y) \exp(-\epsilon X)) \exp(-uY) (\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y) \exp(-\epsilon X))^{-1} \quad (0 \leq u \leq \epsilon)$
 se referme (mod ϵ^3). D'après 1.1.6 ~~ou~~ et 1.1.1, on a

$$\begin{aligned} (1 - R(\epsilon X, \epsilon Y))(Z) &= d(\exp(\epsilon X) \exp(\epsilon Y) \exp(-\epsilon X) \exp(-\epsilon Y))(Z) \\ &= d(\exp([\epsilon X, \epsilon Y]))(Z) = Z + [[\epsilon X, \epsilon Y], Z] \quad (\text{mod } \epsilon^3) \end{aligned}$$

d'où l'analogie.

Corollaire 1.1.18 Sous les hypothèses de 1.1.12, la composante neutre \mathbb{K}^o
 est le groupe d'holonomie locale.

$\exp(s)$,

Corollaire

1.1.19. Soient $s \in \mathfrak{p}$. Puisque \mathfrak{L}_s sont totalement géodésiques, il faut et suffit que $[[s, s], s] \subset \mathfrak{L}_s$.

La condition signifie que $[s, s] \oplus \mathfrak{L}_s$ est une sous-algèbre de Lie ^(stable par σ), $\exp(s)$ est alors le sous-espace symétrique correspondant au voisinage de 0.

Théorème 1.1.20. Soient $H, X \in \mathfrak{p}$. On suppose que ~~la distance de H à X est X~~ X est plus près (ou plus loin) de H que tous ses conjugués ^{K°} . Alors $[H, X] = 0$.

Par hypothèse, pour $Z \in \mathfrak{k}$, $B(H, [Z, X]) = 0$. ~~Pour tout $Z \in \mathfrak{k}$~~ On a donc $B([H, X], \mathfrak{k}) = 0$ et $[H, X] = 0$.

Corollaire 1.1.21 Les sous-algèbres commutatives maximales de \mathfrak{p} sont conjuguées entre elles sous la composante neutre K° de K .

On utilise 1.1.20 et le fait que le centralisateur d'un élément général d'une sous-algèbre commutative ^{\mathfrak{L}_a} de \mathfrak{p} coïncide avec le centralisateur de a .

1.1.22. Supposons M sans facteur compact ($B \neq 0$ sur \mathfrak{p}). Si G est le groupe algébrique réel adjoint d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , les sous-algèbres commutatives maximales \mathfrak{a} de \mathfrak{p} sont les algèbres de Lie de tores ~~max~~ déployés maximaux \underline{S} de G . Le groupe de Weyl W est le quotient du normalisateur de \underline{S} dans $G(\mathbb{R})$ par son centralisateur.

On montre dans \dots que c'est encore le quotient du normalisateur de \mathfrak{a} dans K par son centralisateur. Le rang de M est la dimension de \mathfrak{a} .

composés de symétries, donc des automorphismes, de M . Soient G la ^{composante neutre du} groupe de Lie des automorphismes de M , $x \in M$ et K le stabilisateur de x et σ l'automorphisme de G induit par s_x . Comme en 1.1.6, on a

$$M = G/K$$

$$\text{Lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

La structure complexe de M induit sur \mathfrak{p} une structure complexe J_0 , invariante par K . Réciproquement, si $M=G/K$ est riemannien symétrique, toute structure complexe K -invariante sur \mathfrak{p} munit M d'une structure hermitienne symétrique.

1.2.5. Reprenons la décomposition 1.1.10. ~~On a~~ Si J_0 est une structure complexe \mathfrak{k} invariante sur \mathfrak{p} , les \mathfrak{p}_i sont des sous-espaces complexes (car des représentations disjointes de \mathfrak{k}) et, pour M hermitien symétrique simplement connexe, on trouve une décomposition

5 (1.2.4.1) $M = M_0 \times \prod M_i$

avec M_0 euclidien et (g_i, σ_i) indécomposable et semi-simple. La dualité 1.1.11 ~~est~~ requise le caractère hermitien symétrique.

1.2.6 Supposons G semi-simple, ~~par conséquent~~ Dans ce cas, G est encore la composante neutre du groupe des isométries de M , et tout élément de G ~~est~~ a même algèbre de Lie que le groupe analogue pour le ~~se relève en un automorphisme du revêtement universel \tilde{M} de M~~ $(\mathfrak{g} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p})$. On dispose donc par 1.2.3 de $u_x: U^1 \rightarrow K_x$. Sur ~~Proposition 1.2.7 (i) ad~~ $u_x(z)$ $\mathfrak{p} = \mathfrak{T}_x$, $\text{ad}_{u_x}(z)$ induit la multiplication par z . En particulier, $\text{ad}_{u_x}(-1) \stackrel{\sigma}{=} \text{ad}_{u_x}(z)$ ~~est un isomorphisme de \mathfrak{p} sur \mathfrak{p}~~ .

Proposition 1.2.7 (i) K est le centralisateur de $u(U^1)$ dans G , ~~et $u(U^1)$ est le centre de K~~

- (ii) G est ~~semi-simple~~ adjoint, K est connexe et M est simplement connexe
- (iii) Si (g, σ) est indécomposable, g est ~~semi~~ absolument simple et $u(U^1)$ est le centre de K

(i) Soit K' le centralisateur de $u(U^1)$. Puisque $\sigma = \text{ad}(u(-1))$, $\text{Lie}(K') \subset \text{Lie}(K)$ est compacte, et K' est comme en tout que centralisateur d'un tore, d'où $K' \subset K$. Réciproquement, la représentation de K sur ρ est \mathbb{C} -linéaire et fidèle, de sorte que $K \subset K'$.

(ii) D'après (i), K contient le centre Z de G . Ce dernier est donc trivial.

Appliquant ceci au revêtement universel \tilde{M} de M , on trouve que $\tilde{M} = M$.

(iii) Pour (g, σ) indécomposable, la représentation de K sur ρ est simple;

puisque $u(U^1) \subset K$, on a ~~pour~~ le commutant de K dans $\text{End}(\rho)$

coincide avec son commutant dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(\rho)$, et est réduit au scalaire.

Le centre de K est donc réduit à $u(U^1)$. Puisqu'il est non nul, on lit sur

que g est absolument simple.

On dit que M est simple si la condition 1.2.7(iii) est vérifiée.

Proposition 1.2.8 Soient M un espace riemannien symétrique, et $G, \mathfrak{k} \in \mathfrak{P}$, K, σ

comme d'habitude. On suppose G semi-simple, K compacte et (g, σ)

indécomposable. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la représentation ρ de \mathfrak{k} sur ρ est pas absolument simple;

(ii) le centre de \mathfrak{k} est non nul;

(iii) M admet une structure d'espace hermitien symétrique (compatible à sa structure riemannienne).

La structure (iii) est unique, à conjugaison complexe près.

Puisque la représentation ρ de \mathfrak{k} est simple, (i) équivaut à

l'existence d'une structure complexe \mathfrak{k} -invariante. Puisqu'il n'y a, à

un facteur près, qu'une forme quadratique \mathfrak{k} -invariante sur ρ , une telle

structure complexe ^{est non-jointe à} ~~est jointe à~~ une structure complexe hermitienne

\mathfrak{k} -invariante. On a donc (ii) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (iii), ~~par proposition~~ et (ii) \Rightarrow (i)

et réciproquement (i) \Rightarrow (ii) par 1.2.7 (i). L'unicité résulte de 1.2.7 (iii).

Proposition - définition 1.239 Un domaine hermitien symétrique M est

un espace hermitien symétrique vérifiant les conditions équivalentes suivantes

- (i) K est à courbure < 0
- (ii) G est produit de groupes simples non compact

Les domaines hermitiens symétriques correspondent par dualité aux espaces hermitiens symétriques compacts

12.10 Classification: Soit $M = G/K$ un espace hermitien symétrique simple compact. ~~compact~~ ~~simple~~ ~~compact~~ ~~compact~~. Pour $\alpha \in \mathfrak{h}$, soit $u_\alpha : U^1 \rightarrow G$ comme en 1.2.3. D'après 12.6, ~~il existe~~ ~~une~~ ~~représentation~~ ~~ad~~ u_α sur $\mathfrak{h}(G)_\mathbb{C}$, ^{U^1 n'agit} que par les caractères 1 (sur $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$) et z, \bar{z} (sur $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$).

Réciproquement, si G est un groupe simple adjoint compact et que, $u : U^1 \rightarrow G$ a cette propriété, le centralisateur K de G est commutatif (en tout que centralisateur d'un tore), et il a pour algèbre de Lie le sous-espace fixe sous l'involution $\text{ad } u(-1)$ de $\mathfrak{h}(G)$, et G/K est hermitien symétrique.

Le problème de classification pour M se ramène donc au suivant.

(*) Soit G simple adjoint compact. Classifier les classes de conjugaison de morphismes $u : U^1 \rightarrow G$ tels que ~~il existe~~, dans sa représentation $\text{ad } u$, sur $\mathfrak{h}(G)_\mathbb{C}$, U^1 n'agit que par les 3 ~~autres~~ caractères $1, z$ et \bar{z} .

Soient $T \subset G$ un tore maximal, $\Phi \subset \text{Hom}(T, U^1)$ le système de racines, et Σ un système de racines simples, ^{et α_0 la plus grande racine.} ~~le plus grand~~

On identifie $\text{Hom}(U^1, T)$ au dual du \mathbb{Z} -module libre $\text{Hom}(T, U^1)$ par l'accouplement $\langle \alpha, \nu \rangle = \alpha \circ \nu \in \text{Hom}(U^1, U^1) \cong \mathbb{Z}$. Le morphisme

u a un unique conjugué $u' : U^1 \rightarrow T$ tel que ~~il existe~~ ~~un~~ ~~conjugué~~ ~~tel~~ ~~que~~ ~~il~~ ~~existe~~ ~~un~~ ~~conjugué~~ ~~tel~~ ~~que~~ $\langle \alpha, u' \rangle \geq 0$ pour $\alpha \in \Sigma$. La condition de (*) équivaut à

$$\langle \alpha, u' \rangle = 0, +1 \text{ ou } -1 \text{ pour } \alpha \in \Phi, \text{ soit}$$

$$\langle \alpha_0, u' \rangle = 1$$

Le morphisme u' est caractérisé par les entiers $m_\alpha = \langle \alpha, u' \rangle$ ($\alpha \in \Sigma$), et la condition ci-dessus signifie que $m_\alpha = 0$, sauf pour une racine α telle que $m_\alpha = 1$. Pour celle-ci, $m_\alpha = 1$. En d'autres termes, u' est un poids minuscule du système de racines dual de Φ . La classe de conjugaison de u est entièrement définie par le sommet du diagramme de Dynkin D de G correspondant à α . Si $D' = D \cup \{\alpha\}$ est le diagramme de Dynkin

Write the longest root $\sum_{\alpha \in \Sigma} n(\alpha) \alpha$

14
étendu, les sommets possible sont les sommets de D dans l'orbite
de e sous $\text{Aut}(D')$. Il y en a $f-1$, f désignant l'indice de connexion.

La liste des sommets possibles est donnée dans la table en
annexe.

La classification dans le cas non compact se déduit de ce qui
précède par dualité.

13 Filtrations et graduation

Pour les rappels contenus dans ce n°, on pourra consulter Saavedra [].

~~1.3.1 Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps k . Une graduation de G est la donnée, pour toute représentation linéaire ρ de G , d'une graduation de l'espace V de la représentation. On exige que ces graduations soient fonctorielles en V et compatibles~~

1.3.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k .

On sait qu'il revient au même de se donner une graduation de type

\mathbb{Z} de V ou une représentation $w: \mathbb{G}_m \rightarrow GL(V)$; on a

$$w(\lambda) = \lambda^i v \quad \text{si } v \in V^i.$$

La filtration croissante (resp décroissante) associée est définie par

$$W_i(V) = \bigoplus_{j \leq i} V^j$$

$$\text{(resp } W^i(V) = \bigoplus_{j \geq i} V^j \text{)}.$$

1.3.2 Soit G un groupe réductif sur un corps k de caractéristique 0 et

$w: \mathbb{G}_m \rightarrow G$ un morphisme. Pour toute représentation $\rho: G \rightarrow GL(V)$

de G , $\rho \circ w: \mathbb{G}_m \rightarrow GL(V)$ définit par 1.3.1 une filtration croissante

W sur V . Cette filtration est fonctorielle en V et le foncteur

$(V, \rho) \mapsto (V, W)$ est compatible au produit tensoriel et à la dualité :

$$W^i(V' \otimes V'') = \bigoplus_{j'+j''=i} W^{j'}(V') \otimes W^{j''}(V'')$$

$$\text{et } W^i(V^*) = W^{-1-i}(V)^\perp$$

Réciproquement, tout foncteur $(V, \mathcal{F}) \mapsto (V, W)$ compatible au produit tensoriel et à la dualité est défini par un morphisme $w: G_m \rightarrow G$.
 Nous ne ferons pas usage de ce fait et définirons une filtration W de G (ou de la catégorie des représentations de G) comme un foncteur $(V, \mathcal{F}) \mapsto (V, W)$ défini par un morphisme $w: G_m \rightarrow G$.

Soit $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ l'espace de la représentation adjointe de G .

Rappel 1.3.3. (i) $W_0(G)$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique $W_0(G)$ de G . C'est le sous-groupe de G qui respecte la filtration W de toute représentation de G .

(ii) $W_{-1}(G)$ est l'algèbre de Lie du radical unipotent $W_{-1}(G)$ de $W_0(G)$. C'est le sous-groupe de $W_0(G)$ qui, pour toute représentation V de G , agit trivialement sur $G^W(V)$.

(iii) le centralisateur $Z(w)$ de w est un sous-groupe de Lie de $W_0(G)$.

Dans (i) et (ii), on peut remplacer toute représentation de G l'ensemble de toutes les représentations de G par un ensemble de représentations (V_i, \mathcal{F}_i) tel que l'intersection des noyaux $\text{Ker}(\mathcal{F}_i)$ soit finie.

D'après (iii), on a $Z(w) \cong W_0(G)/W_{-1}(G)$. En particulier, le morphisme composé

$$\bar{w}: G_m \rightarrow W_0(G) \rightarrow W_0(G)/W_{-1}(G)$$

est central.

Soit $w': G_m \rightarrow G$ définissant une filtration W' .

Rappel 1.3.4. Pour que $W = W'$, il faut et suffit que $W_0(G) = W'_0(G)$ et que $\bar{w} = \bar{w}'$. Les morphismes w et w' sont alors conjugués sous $W_{-1}(G)$.

Des énoncés analogues valent pour les filtrations décroissantes.

Exercice 135 Soient M et G comme ci-dessus et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Fixons une origine $o \in M$, et soient $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_o$, \mathfrak{k} la centralisateur de \mathfrak{h} , $\sigma = \text{ad } \mathfrak{h}_\alpha(-i)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ la décomposition correspondante et $J = \text{ad } \mathfrak{h}_\alpha(e^{2\pi i/\theta})|_{\mathfrak{p}}$ la multiplication par i sur \mathfrak{p} , identifiée à l'espace tangent à M en o .

La structure de Hodge ^(rel. à $o \in M$) de la représentation adjointe est de type $\{(-1, 1)(0, 0), (1, -1)\}$. On a

$$\mathfrak{g}^{0,0} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{g}^{-1,1} \oplus \mathfrak{g}^{1,-1} = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$$

On pose $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{g}^{1,-1}$ et $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{g}^{-1,1}$. Ce sont des sous-algèbres commutatives de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si (H, ρ) est une représentation de module fini de G , on a $\rho(\mathfrak{E}) = (-i)^n$, $F^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^+$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique $F^0(G_{\mathbb{C}})$ de $G_{\mathbb{C}}$ qui respecte la filtration de Hodge sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.

Puisque la filtration de Hodge détermine la structure de Hodge, l'application

$$(1.3.5.1) \quad M = G/K \longrightarrow G_{\mathbb{C}} / F^0(G_{\mathbb{C}})$$

est injective. On vérifie a priori que c'est un plongement ouvert holomorphe

(plongement de Borel). Si G^* est la forme compacte de G d'algèbre de Lie

$\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$, on ~~vérifie~~ montre que $G^*/K \xrightarrow{\sim} G_{\mathbb{C}} / F^0(G_{\mathbb{C}})$, de sorte que (1.3.5.1)

est un plongement de M dans le domaine dual.

1.4 Structure de Hodge

1.4.1 Normalisation: Une structure de Hodge ^{de poids n} sur un espace vectoriel réel H de dimension finie est au choix

(A) une bigraduation du complexifié $H_{\mathbb{C}}$

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

telle que $H^{p,q}$ soit le complexe conjugué de $H^{q,p}$,

(B) une filtration ~~de~~ finie (décroissante) F de $H_{\mathbb{C}}$ telle que

$$H_{\mathbb{C}} = F^p \oplus \bar{F}^q \text{ pour } p+q = n+1;$$

(C) une action ~~sur~~ $H_{\mathbb{C}}$ du groupe algébrique réel $\underline{S} = \mathbb{C}^*$, telle que $x \in \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}^*$ agisse par multiplication par x^{-n} ;

~~(C') une action sur H de $U^1 \subset \mathbb{C}^*$, telle que x agisse par $(x)^n$.~~

On passe d'une définition à l'autre par les règles

$$H^{p,q} = F^p \cap \bar{F}^q$$

$$F^p = \bigoplus_{i \geq p} H^{i,0}$$

$$h(z)v = z^{-p} \bar{z}^{-q} v \text{ pour } z \in \underline{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^* \text{ et } v \in H^{p,q}$$

La définition (B) met en évidence une structure complexe, induite de celle ~~de~~ d'une grassmannienne, sur la variété des structures de Hodge sur H .

Une polarisation ψ de H est une forme bilinéaire sur H , invariante par $h(U^1)$, et telle que la forme

$$\psi(x, h(i)y)$$

soit symétrique et définie positive. On a $h(-i)v = i^{p-q} v$ pour $v \in H^{p,q}$.

1.4.2. type $(-1,0) + (0,-1)$.

Une structure complexe sur un espace vectoriel réel H ~~est~~ définit une action (par homothètes) de \mathbb{C}^* sur H . Cette construction identifie structures complexes sur H et structures de Hodge de type $(0,-1) + (-1,0)$.

L'application $H \rightarrow H_{\mathbb{C}} / F^0(H_{\mathbb{C}})$ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire,

imaginaires d'une forme hermitienne définie positive. Précisons que "hermitien" l'opérateur hermitien signifie pour nous

$$\phi(\lambda x, \mu y) = \lambda \phi(x, y) \bar{\mu}$$

1.4.3 Soient M un domaine hermitien symétrique (1.2.9) et G la composante neutre du groupe de ses automorphismes. Pour $x \in M$, nous notons $u_x : U^1 \rightarrow G$ le morphisme ~~associé~~ (cf 1.2.6) $z \mapsto$ l'automorphisme de M qui fixe x et agit sur l'espace tangent par multiplication par z .

On sait que le stabilisateur de x est égal au centralisateur de u_x , de sorte que l'application $x \mapsto u_x$ identifie M à l'ensemble des conjugués de u_x .

1.4.4 Soient \underline{G} le groupe algébrique adjoint réel d'algèbre de Lie \mathfrak{g} (on a $\mathbb{R}\underline{G} = \mathfrak{g}(\mathbb{R})^\circ$), et $\pi : \underline{G}_1 \rightarrow \underline{G}$ un ~~réseau~~ revêtement (algébrique) connexe de \underline{G} . On suppose que $h_x = u_x^2$ se relève en

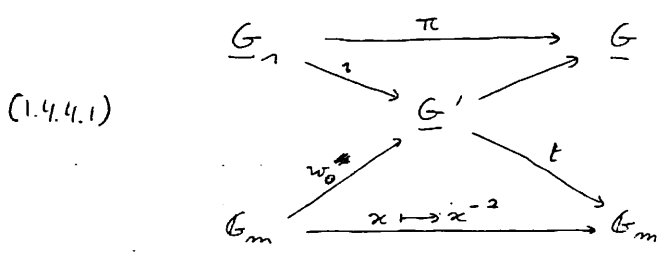
^(encore noté h_x) un morphisme de U_1 dans \underline{G}_1 . L'élément central $\varepsilon = h_x(-1)$ ne dépend pas du choix de x . Il est trivial ou d'ordre 2. Nous définissons le groupe algébrique ^{réel} \underline{G}' comme le quotient de $\underline{G}_1 \times \mathbb{G}_m$ par $\{e, (\varepsilon, -1)\}$. Les applications composées

$$z : \underline{G}_1 \rightarrow \underline{G}_1 \times \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{G}'$$

et l'inverse w_0 de l'application composée

$$w_0^{-1} : \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{G}_1 \times \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{G}'$$

s'insèrent dans un diagramme commutatif ~~de la forme suivante~~



~~Les~~ les diagonales composées sont triviales et $t(\text{image de } (g_1, \lambda)) = \lambda^2$.

De même que \underline{G}' est quotient de $\underline{G}_1 \times \underline{G}_m$, le groupe algébrique \underline{S} est le quotient de $U_1 \times \underline{G}_m$ par l'espace $\mathbb{R} \setminus \{0\} / \sim \cong \mathbb{R}^* / \sim \cong \{e, (-1, -1)\}$. Le morphisme $(h_x, \text{id}) : U_1 \times \underline{G}_m \rightarrow \underline{G}_1 \times \underline{G}_m$ passe au quotient et définit

$$h_x : \underline{S} \rightarrow \underline{G}'$$

On a $(h_x(z) = z\bar{z})$ et $h_x(\lambda^{-1}) = w(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'application $x \mapsto h_x$ identifie encore M à l'ensemble des conjugués d'un h_x sous G (ou, ce qui revient au même, sous $\underline{G}'(\mathbb{R})^\circ$).

1.45. Soient n un entier. $\rho : \underline{G}' \rightarrow GL(H)$ Une représentation ρ de \underline{G}'

de poids n si $\rho(w_\alpha(\lambda)) = \lambda^n \rho(\alpha)$ l'homothétie de rapport λ^n . (Soit ρ de poids n . Pour tout $x \in M$,

$\rho \circ h_x : \underline{S} \rightarrow GL(H)$ définit sur H une structure de Hodge de poids

n (1.4.1 (C)). Nous noterons F_x la filtration de Hodge correspondante de $H_\mathbb{C}$.

Soit $\varphi : \underline{G}_m \rightarrow \underline{S}_\mathbb{C}$ l'homomorphisme tel que $z \circ \varphi$ soit $x \mapsto x'$ et que $\bar{z} \circ \varphi$ soit trivial. La filtration F_x est la filtration décroissante associée à $\rho \circ h_x \circ \varphi$; elle est justiciable des résultats de 1.3. En

particulier, $F_x^\circ(\text{Lie}(\underline{G}'))$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique $F_x^\circ(\underline{G}')$ de $\underline{G}'_\mathbb{C}$. On note \check{M} l'espace de drapeaux correspondant; il s'identifie à l'ensemble des conjugués de $F_x^\circ(\underline{G}')$.

L'application de Borel $\beta : M \rightarrow \check{M}$ est

$$x \mapsto F_x^\circ(\underline{G}')$$

Théorème 1.4.6 (Borel). L'application β est holomorphe. Elle identifie M à un ouvert de \check{M} .

(1.4.6.1) Injectivité de β Pour (H, S, n) comme en 1.4.5 et $y \in M$, 24

on définit une filtration F_y de $H_{\mathbb{C}}$ comme suit : on a $y = g\beta(x)$ avec $g \in \underline{G}'(\mathbb{C})$, et $F_y = g F_x$ ^{on pose}. Cette définition ne dépend pas du choix de g , car si $g\beta(x) = \beta(x)$, g est dans $F_x^0(\underline{G}'(\mathbb{C}))$ et respecte F_x . Pour $y \in M$, $F_{\beta(y)}$ est la filtration de Hodge F_y .

En particulier, pour $y \in M$, F_y ne dépend que de $\beta(y)$. Pour toute n et toute représentation ρ ~~de $H_{\mathbb{C}}$~~ ^{la structure de Hodge} comme en 1.4.5, $\rho \circ h_y$ ne dépend donc que de $\beta(y)$. Il en résulte que h_y , donc y , ne dépend que de $\beta(y)$.

(1.4.6.2) β est ^{une immersion} holomorphe.

Soient $x \in M$, $g' = \text{li}(\underline{G}')$, k' le stabilisateur de x et p le complément orthogonal de k' dans $g = \text{li}(\underline{G}) \subset g'$. On a $\text{ad } h_x(-i) = -1$ sur p . L'espace tangent à M en x s'identifie à p , qui en tant que tel est muni d'une structure complexe. Par définition de h_x , on a

$$\text{ad } h_x(z) \cdot \pi = z^2 \pi \quad \text{pour } \pi \in p \text{ et } z \in U^1, \text{ soit}$$

$$\text{ad } h_x(z) \cdot \pi = z \bar{z}^{-1} \pi \quad \text{pour } \pi \in p \text{ et } z \in \mathbb{C}^* = \underline{S}(\mathbb{R})..$$

En x , $d\beta$ s'identifie à l'application naturelle

$$(1) \quad p \longrightarrow g'_{\mathbb{C}} / F^0(g'_{\mathbb{C}}).$$

On a $h'_{\mathbb{C}} = g'_{\mathbb{C}}{}^{0,0}$, $p_{\mathbb{C}} = g'_{\mathbb{C}}{}^{-1,1} \oplus g'_{\mathbb{C}}{}^{1,-1}$ et $g'_{\mathbb{C}} / F^0(g'_{\mathbb{C}}) \simeq g'_{\mathbb{C}}{}^{-1,1}$. L'application $d\beta$ est donc bijective. Sur $g'_{\mathbb{C}} / F^0(g'_{\mathbb{C}})$, $\text{ad } h_x(z)$ agit par multiplication par $z \bar{z}^{-1}$. Puisque (1) commute à l'action de $h_x(z)$, $d\beta$ commute à la multiplication par $z \bar{z}^{-1}$ ($z \in \mathbb{C}^*$), donc est \mathbb{C} -linéaire. Ceci achève la démonstration.

~~pour $z \in \mathbb{C}^*$, $d\beta$ est \mathbb{C} -linéaire. Ceci achève la démonstration.~~

1.4.7. Soient (H, ρ, n) comme en 1.4.4. La formation de la structure de Hodge $\rho \circ h_n$ sur H est compatible au produit tensoriel de représentations et au passage à la représentation duale. Pour ρ trivial sur G_1 , elle est seulement de type $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. La structure de Hodge $\rho \circ h_n$ sur H

vérifie donc la condition suivante.

(1.4.7.1) Tout tenseur G_1 -invariant dans $\otimes^m H \otimes \otimes^m H^*$ est d'un type (m, m) .

Proposition 1.4.8 Si le noyau de $\rho_1 = \rho|_{G_1}$ est fini, $x \mapsto \rho \circ h_x$ est

~~un isomorphisme~~ un isomorphisme holomorphe de M avec l'une des composantes connexes de l'ensemble des structures de Hodge de poids n sur H vérifiant (1.4.7.1)

~~(*) Tout tenseur G_1 -invariant dans $\otimes^m H \otimes \otimes^m H^*$ est d'un type (k, k)~~

Si (H, ρ) est une représentation fidèle d'un groupe réductif G'' , on voit que G'' est le sous-groupe algébrique de $GL(H)$ formé des g qui laissent fixe un ensemble fini convenable de tenseurs G'' -invariants.

Les structures de Hodge considérées sur H sont donc celles définies par un morphisme $h: U^1 \rightarrow G_1 / \text{Ker}(\rho_1)$. Les conjugués de h_n forment l'une des composantes de cet ensemble.

Remarque 1.4.9. via 1.4.8, et si on identifie \check{M} à un espace de drapeaux de H_G , $\beta: M \rightarrow \check{M}$ s'identifie à

(structure de Hodge h) \rightarrow (filtration de Hodge F_2).

Soient (H, ρ, n) comme en 1.4.4. et γ une forme bilinéaire G_1 -invariante sur H .

Définition 1.4.10 γ est une polarisation de (H, ρ) si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées

G_1

- (i) Pour un $x \in M$, Ψ est une polarisation de (H, ρ, h_x) .
- (ii) Pour tout $x \in M$, Ψ est une polarisation de (H, ρ, h_x) .

L'équivalence de (i) et (ii) résulte de la formule suivante : pour

$$g \in \underline{G}_{-1}(\mathbb{R}),$$

$$\Psi(a, h_{gx}(-i)b) = \Psi(a, g h_x(-i) g^{-1} b) = \Psi(g^{-1} a, h_x(-i) g^{-1} b).$$

Une polarisation est $(-i)^n$ -symétrique.

Soient $x \in M$, σ l'involution de Cartan ad $h(-i)$ de \underline{G}_{-1} et $\underline{G}_{-1}^\sigma \subset \underline{G}_{-1}(\mathbb{C})$ le sous-groupe compact

$$\underline{G}_{-1}^\sigma = \{g \in \underline{G}_{-1}(\mathbb{C}) \mid \bar{g} = \sigma(g)\}.$$

Pour qu'une forme

Ψ sur H soit une polarisation, il faut et il suffit que la forme hermitienne $\Psi(a, h_x(-i)\bar{b})$ sur $H_{\mathbb{C}}$ soit symétrique, définie positive et $\underline{G}_{-1}^{\sigma}$ -invariante. Puisque $\underline{G}_{-1}^{\sigma}$ est compact, toute représentation de \underline{G}' est donc polarisable.

Remarque 1.4.11. Soit $R(n)$ la droite \mathbb{R} sur laquelle \underline{G}' agit par multiplication par $t^n(g)$. Pour tout $x \in M$, $R(n)$ est de type de Hodge $(-n, -n)$. Si on regarde une polarisation Ψ de H (H de poids n) comme étant une application $\Psi: H \otimes H \rightarrow R(-n)$, alors Ψ est \underline{G}' -équivariante, et un morphisme de structure de Hodge.

Remarque 1.4.12. Soient $o \in M$, $g = k + p$ la décomposition correspondante de g et G^* la forme compacte de G d'algèbre de Lie $k + i p$. Nous avons déjà défini le dual \check{M}_o de M comme le quotient G^*/K .

On montre que

$$(1.3.9.1) \quad \check{M}_o = G^*/K \xrightarrow{\sim} \underline{G}'(\mathbb{C})/F_o^\circ(\underline{G}'(\mathbb{C})) = \check{M};$$

ceci justifie ~~l'usage~~ la terminologie. ~~Par la suite, nous donnons, dans ce qui suit, nous~~

Généralisation 1.4.13 Dans ce qui précède, nous avons pris pour \underline{G}_1 un revêtement fini de \underline{G} . Plus généralement, soit \underline{G}_1 un groupe algébrique réductif ^{comexe} réel, muni de $\pi: \underline{G}_1 \rightarrow \underline{G}$, et tel que $\text{Ker}(\pi)$ soit compact. Soient $\gamma_0 \in M$ et $\tilde{h}_0: U^1 \rightarrow \underline{G}_1$ un relèvement de h_0 , centralisé par $\text{Ker}(\pi)$. Pour $x \in M$, $x = g_0$ dans M et \tilde{g} un relèvement de g dans $\underline{G}_1(\mathbb{R})$, posons $\tilde{h}_x = \tilde{g} \tilde{h}_0 \tilde{g}^{-1}$. Le relèvement de h_0 est indépendant du choix de \tilde{g} . La construction $x \mapsto \tilde{h}_x$ identifie M à l'ensemble des $\underline{G}_1(\mathbb{R})^\circ$ -conjugués de h_0 . ~~Par conséquent~~

~~separatation~~ L'élément $\tilde{h}_x(-1)$ de \underline{G}_1 est encore central, donc indépendant de x . On pose $\underline{G}' = \underline{G}_1 \times \underline{G}_m / \{1, \epsilon\}$. Le groupe figure encore dans un diagramme (1.4.4.1) et, comme en 1.4.4, on prolonge \tilde{h}_x en $\tilde{h}_x: \underline{S} \rightarrow \underline{G}'$.

On définit comme en 1.4.5 les représentations de poids n de \underline{G}' ; pour (H, ρ) une représentation de poids n , $\tilde{h}_x \forall x \in M$ et $x \in M$, $\rho \circ \tilde{h}_x$ est une structure de Hodge de poids n sur H . On définit une polarisation de (H, ρ) comme en 1.4.10; toute représentation est polarisable.

Réciproquement, soit \underline{G}_1 un groupe algébrique réductif comexe réel et $h_0: U^1 \rightarrow \underline{G}_1$ un morphisme tel que

- a) dans la représentation $z \mapsto \text{ad } h_0(z)$ de U^1 sur $\text{Lie}(\underline{G}_1)_{\mathbb{C}}$, U^1 n'agit que par les caractères $z\bar{z}^{-1}, 1, z^{-1}\bar{z}$.
- b) $\text{ad } h_0(-1)$ est une involution de Cartan.

Alors, l'ensemble M des conjugués de h_0 ^{(sur $\underline{G}_1(\mathbb{R})^\circ$)} est ~~un~~ un espace hermitien symétrique, relativement auquel \underline{G}_1 est du type considéré plus haut.

Plus tard, nous aurons à faire usage du cas où \underline{G}_1 est $U_1 \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$, et où h_0 est l'application de composantes l'identité et

$$h_0^{sl}: e^{i\theta} \mapsto \text{rotation d'angle } \theta$$

§2. Cônes

2.1 Cônes homogènes

(d'après Vinberg et Koecher)

2.1.1 Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Nous dirons qu'une partie C de $V - \{0\}$ est un cône si C est ouverte et que

$$\lambda C = C \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Soit $C' \subset V^*$ l'ensemble des formes linéaires ≥ 0 sur C . Le dual C^* de $C \subset V$ est l'intérieur de $C' - \{0\}$. On dit que C est saillant si $C^* \neq \emptyset$. On a $C \subset C^{**}$, avec égalité si et seulement si C est saillant convexe (ou $C = V - \{0\}$).

On dit que C est autoadjoint si il existe une forme quadratique > 0 Q sur V telle que l'isomorphisme \sim correspondant transforme C en C^* .

2.1.2 Soient $C \subset V$ un cône saillant convexe, C^* son dual, G le groupe des automorphismes de (V, C) et dx, dx^* des

mesures de Haar en dualité sur V et V^* . La mesure sur C

$$\mu = \int_{C^*} e^{-\langle x, x^* \rangle} dx^* \cdot dx = \varphi(x) dx$$

est G -invariante, ainsi donc que la $\int_C e^{-\langle x, x^* \rangle} dx^* dx = \int_C \varphi(x) dx$ structure riemannienne

sur C (pour vérifier que $g > 0$, se rappelle que

$$d^2 \log \int \varphi_u du = \frac{\int \varphi_u d^2 \log \varphi_u du}{\int \varphi_u du} + \frac{1}{2} \frac{\iint \varphi_u \varphi_v (d \log \varphi_u - d \log \varphi_v)^2 du dv}{\iint \varphi_u \varphi_v du dv}$$

Soient C un cône convexe saillant et G le groupe de Lie des automorphismes de (V, C) .
 Corollaire 2.1.3 Le stabilisateur de $e \in C$ dans G est compact, et compact maximal si C est homogène.

Pour la seconde assertion, on note que tout sous-groupe compact

(maximal) de G a un point fixe dans V (argument de moyenne).

Corollaire 2.1.4 Soient C un cône saillant et G un groupe d'automorphismes de (V, C) . On suppose qu'il existe $e \in C$ tel que G_e soit ouvert. Alors, C est un cône convexe et homogène sous G .

On a $G \cdot e \subset C \subset C^{**}$, et C^{**} vérifie les hypothèses de 2.14. Ceci permet de remplacer C par C^{**} , ce de ~~suppose~~ ^{que C est un cône convexe saillant}. Soit $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre e et rayon ε (pour la métrique riemannienne g) soit contenue dans $G \cdot e$. Puisque d est invariante, pour toute suite de points x_n avec $e = x_0$ et $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$, on a $x_n \in G \cdot e$. On conclut en notant que C est convexe.

Corollaire 2.15 Soient G un groupe réductif connexe, (V, ρ) une représentation de G , $e \in V$ et G_e la composante neutre de $G_e(\rho)$. On suppose que le stabilisateur de e dans G est un sous-groupe compact maximal et que G_e est ouvert. Alors G_e est un cône ~~convexe~~ homogène autoadjoint. Réciproquement, le groupe des automorphismes d'un cône ~~convexe~~ autoadjoint est réductif.

Soient K le stabilisateur de e , σ l'involution de Cartan correspondante, et B une forme bilinéaire symétrique définie > 0 sur V telle que $B(\sigma(g)v, v) = \rho(g)^{-1}$. Soit les décompositions de Cartan $\mathfrak{lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et $G = K \cdot \exp(\mathfrak{p})$. ~~Pour $g \in \exp(\mathfrak{p})$ on a $g = p^2 k$ ($p \in \exp(\mathfrak{p})$ et $k \in K$), on a~~
 $\langle g \cdot e, e \rangle = \langle p^2 e, e \rangle = \langle p e, p e \rangle > 0$. Si on identifie V à V^* à l'aide de B , on a donc $G \cdot e \subset (G \cdot e)^*$.

Soient $g_1, g_2 \in G$ et posons $\sigma(g_2)g_1 = p^2 k$, avec $\exp p \in \exp(\mathfrak{p})$. On a

$$\langle g_1 e, g_2 e \rangle = \langle \sigma(g_2)g_1 e, e \rangle = \langle p^2 e, e \rangle = \langle p e, p e \rangle > 0.$$

Si on identifie V à V^* à l'aide de B , on

On a donc $G \cdot e \subset (G \cdot e)^*$. Le cône $(G \cdot e)^*$ est stable par G : si $x \in (G \cdot e)^*$ et

que $h \in G$, pour tout $g \in G$

$$\langle g e, h x \rangle = \langle \sigma(h)g e, x \rangle > 0.$$

~~Observez~~ Appliquons 2.14 à $(G \cdot e)^*$; on trouve que $G \cdot e = (G \cdot e)^*$.

Réciproquement, si C est un cône autoadjoint, son groupe d'automorphismes est stable par $g \mapsto \rho(g)$, donc est réductif.

Appendice. ~~112~~ Algebras de Jordan (d'après Vinberg, Koecher & Jacobson) et Tits)

2.2.1. Rappelons qu'une algebre de Jordan A est une algebre à unite' (non necessairement associative) dont la multiplication \circ verifie les identites

(1) $a \circ b = b \circ a$ et (posant $a^2 = a \circ a$)

(2) $a^2 \circ (b \circ a) = (a^2 \circ b) \circ a$

Cette definition n'est la bonne que si 2 est inversible

(voir Jacobson, quadratic Jordan algebras, Tata institute) 3

et il y aurait lieu d'ajouter à (1) et (2) les identites requises pour que

(1) et (2) restent vrais apres extension des scalaires. Les problemes ne se posent pas si A est une algebre sur un corps de dimension finie ou un corps k de caractéristique 0; ~~il est possible~~ on se restreint dorénavant à ce cas.

Posons Pour $a \in A$, nous ~~posons~~ notons R_a la multiplication par a : $R_a(x) = a \circ x$. Posons

$S(a, b, c, d) = (a \circ b) \circ (c \circ d) + (a \circ c) \circ (b \circ d) + (a \circ d) \circ (b \circ c)$

(symétrique en a, b, c, d d'après (1))

$T(a; b, c, d) = (a \circ (b \circ c)) \circ d + (a \circ (c \circ d)) \circ b + (a \circ (d \circ b)) \circ c$

(symétrique en b, c, d d'après (1))

Par polarisation, ^{et division par 2} (2) fournit

(3) $S(a, b, c, d) = T(a; b, c, d)$,

ce qui s'écrit encore

(4) $[R_a, R_{bc}] + [R_b, R_{ca}] + [R_c, R_{ab}] = 0$.

~~(5) l'identité $T(a, b, c, d) = T(b; a, c, d)$ résulte de (3) et n'est pas utile~~

L'identité'

$$(5) \quad T(a; b, c, d) = T(b; a, c, d)$$

déduit de (3) \leadsto écrit encore

(6) $[R_a, R_b]$ est une dérivation.

Les puissances a^n ($n \geq 0$) de a sont définies par récurrence par

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{n+1} = a \circ a^n$$

Proveons par récurrence sur $n+m$ que

$$(7) \quad a^n \circ a^m = a^{n+m}$$

Si n ou m vaut 0 ou 1, (7) résulte de la définition, de (1) et ce de que 1 est une unité'. Ici prouve (7) pour $l \leq 3$; pour $l=4$, il faut prouver que

$$a^2 \circ a^2 = a^4$$

c'est le cas particulier $b = a^2$ de (2). Supposons que $l \geq 5$, et que (7) est vrai pour $l' < l$. Appliquons (5) à (a^l, a^q, a^2, a^s) .

($p, q, r, s > 0$, $p+q+r+s = l$). Vu l'hypothèse de récurrence, on trouve que

$$a^p \circ a^{l-p} = a^q \circ a^{l-q}$$

Faisons $q=r=s=1$: on trouve que (7) est vrai si $n+m=l$ et que

$n \leq l-3$. Puisque il suffit de prouver (7) pour $n \leq m$, et que si $l \geq 5$,

$n \leq l-n \Rightarrow n \leq l-3$, ceci achève la démonstration.

Remarque : On déduit aisément de cette preuve qu'une algèbre à unité vérifiant (1) et (6) est de Jordan n et seulement si $a^2 \circ a^2 = a^4$ (Rappelons qu'on est en caractéristique 0)

Proposition 2.2.2 (Vincberg) Soit A une algèbre à unité (non nécessairement associative) sur \mathbb{C} .

(a) A vérifie (1) et (6).

(b) On a $t([R_a, R_b](c)) = 0$.

(c) La forme $t(a \circ b)$ est non dégénérée.

Alors, A est de Jordan.

Remarque Lorsque $t(a) = \text{Tr}(R_a)$,

la condition (b) est automatique : pour toute dérivation D de A , on a

$$\text{Tr}(R_{Dc}) = \text{Tr}([D, R_c]) = 0$$

Preuve Il suffit de prouver la forme polarisée (4) de (2). ~~Elle est~~ Posons

$$\{a, b, c, d; e\} = t(([R_a, R_{bc}] + [R_b, R_{ca}] + [R_c, R_{ab}])(d) \cdot e)$$

Envisant (4) sous forme (3), ^{et appliquant (6) sous la forme (5)} on voit que $\{a, b, c, d; e\}$ est symétrique en

a, b, c, d . On a

$$\{a, b, c, d; e\} + \{a, b, c, e; d\} = t(([R_a, R_{bc}] + \dots)(de)) = 0$$

par (b), de sorte que $\{a, b, c, d; e\}$ est antisymétrique en d et e .

La forme $\{a, b, c, d; e\}$ est dès lors nulle :

$$\{a, b, c, d; e\} = -\{a, b, c, e; d\} = \{a, b, d, e; c\} = -\{a, b, d, c; e\}.$$

D'après (c), ~~car~~ puisque e est arbitraire, on a (4).

2.2.3 Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et (V, ρ) une représentation ^{fidèle} de \mathfrak{g} , et $e \in V$, On suppose \mathfrak{g} munie d'une involution σ telle que σ une involution de \mathfrak{g} et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition correspondante.

On suppose que

(*) \mathfrak{k} est le stabilisateur de e et l'application ~~de \mathfrak{p} dans V~~ $\pi \mapsto \pi \cdot e$ ~~est~~ ~~surjection~~ de \mathfrak{p} dans V est bijective.

On définit sur \mathfrak{p} une loi de composition \circ par la règle ~~($\pi \circ \pi'$)~~

(2.2.3.1) $\pi \circ \pi' \cdot e = \pi(\pi' \cdot e)$

Soit ε l'élément de \mathfrak{p} tel que $\varepsilon \cdot e = e$.

* ~~La loi \circ vérifie les identités suivantes~~

(2.2.3.2) $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi$

En effet, $(\pi \circ \pi' - \pi' \circ \pi) \cdot e = [\pi, \pi'] \cdot e = 0$ car $[\pi, \pi'] \in \mathfrak{k}$.

(2.2.3.3) ε est une unité.

En effet, $\pi \circ \varepsilon \cdot e = \pi \cdot e$. Pour $v \in V$, on a donc $\varepsilon \cdot v = v$.

(2.2.3.4) L'identité (6)

On vérifie en effet que

(2.2.3.5) $[R_\pi, R_{\pi'}] = \text{ad} [\pi, \pi']$

2.2.4. Réciproquement, si une algèbre à unité $(A, 0)$ vérifie (7) et (6), et que D est l'algèbre des dérivations de A , on fait de $D \oplus A$ une algèbre de Lie en posant

- pour $d, d' \in D$, $[d, d']$ est dans D , et le crochet usuel de d et d'
- pour $d \in D$, et $a \in A$, $[d, a]$ est dans A ; c'est $d(a)$
- pour $a, b \in A$, $[a, b]$ est dans D ; c'est $[R_a, R_b]$.

L'involution $\sigma : (d, a) \mapsto (d, -a)$ est un automorphisme, et $L^\circ(A)$

~~agit~~ agit sur A par les règles

$L^\circ(A) =$

$$f(d)a = d(a) \quad \text{et}$$

$$f(b)a = b \circ a$$

Cette représentation est fidèle : les dérivations d de A respectant $e : d(e) = 0$, $\alpha(d+a).x$ est identiquement nul, on trace en faisant $x = e$ que $a = 0$. Que $d = 0$ et alors clair. Le système $(L(A), A, \rho, e, \sigma)$ est donc du type 2.2.3 et la construction 2.2.3 appliquée à ce système redonne (A, ρ) .

2.2.5 Soit τ l'unique forme bilinéaire sur $SL(2)$ telle que

$$(8) \quad [a, [b, c]] = \tau(a, b)c - \tau(c, a)b$$

On a

$$\tau(a, b) = 2 \cdot \text{trace de la matrice } a \cdot b.$$

τ est une forme bilinéaire symétrique invariante. Pour A une algèbre de Jordan, et D l'algèbre de Lie de ses dérivations, nous posons

$$L(A) = D \oplus SL(2) \otimes A.$$

On fait de $L(A)$ une algèbre de Lie en posant

- sur D , $[,]$ est le crochet usuel ;
- pour $d \in D$, $u \in SL(2)$ et $a \in A$, on a

$$[d, u \otimes a] = u \otimes d(a) ;$$

- pour $u, v \in SL(2)$ et $a, b \in A$, on a

$$[u \otimes a, v \otimes b] = \tau(u, v) [R_a, R_b] + [u, v] \otimes (a \cdot b).$$

Il est clair que pour $d \in D$, add est une dérivation, pour vérifier que $[,]$ est un crochet de Lie, il nous suffit donc de vérifier l'identité de Jacobi entre x, y, z pour x, y, z dans $L(A)$. L'identité de Jacobi pour x, y, z est donc vraie pour x, y ou z dans D , et il reste à la vérifier pour un triple $(u \otimes a, v \otimes b, w \otimes c)$. On a

$$\begin{aligned} \star [u \circ a, [v \circ b, w \circ c]] &= -\tau(vw) u \circ [R_b, R_c](a) \\ &+ [u, [v, w]] a \circ (b \circ c) + \tau(u, [v, w]) [R_a, R_{b,c}] \end{aligned}$$

L'identité de Jacobi résulte alors des suivants

- * $\tau(u, [v, w])$ est invariant par permutation circulaire de u, v, w (ceci exprime son invariance) et \circ vérifie (4)
- * \circ vérifie (1), et τ vérifie (8).

Pour \mathfrak{h} l'algèbre de matrices diagonales dans $sl(2, \mathbb{R})$, on identifie $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \otimes A$ à $\mathfrak{L}^\circ(A)$

$$\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{h} \otimes A \subset \mathfrak{L}(A)$$

par $(d, a) \mapsto d + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes a$. L'action de $\mathfrak{L}^\circ(A)$ sur A s'identifie à l'action adjointe de cette sous-algèbre sur A , identifiée à une sous-algèbre par $a \mapsto n \otimes a$, $n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.6 Prenons pour corps de base \mathbb{R} . Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie \mathfrak{h} , $C \subset V$ un cône homogène autoadjoint ^(annal) et $e \in C$. Soient \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de $\text{Aut}(V, C)$, \mathfrak{k} le stabilisateur de \mathfrak{g} , \mathfrak{p} son orthogonal et σ l'involution de \mathfrak{g} dont \mathfrak{k} et \mathfrak{p} sont les sous-espaces propres, les valeurs propres $+1$ et -1 . Le système $(\mathfrak{g}, V, e, \sigma)$ vérifie les hypothèses de 2.2.3, et σ est une involution de Cartan; pour une forme quadratique définie > 0 convenable sur V , σ est la restriction à $\mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$ de ~~opérateur~~ la composition $u \mapsto -t u$.

La construction 2.2.3 ~~est~~ munit \mathfrak{p} d'une loi \circ vérifiant (1) et (6) et l'unité e agit scalairement sur V .

2.2.7 Soit t la forme linéaire

$$t(\pi) = \langle \pi e, e \rangle \quad \text{sur } \mathfrak{p}$$

On a

$$\begin{aligned} t([R_a, R_b](c)) &= \langle [[a, b]c], e, e \rangle \\ &= \langle c, e, [a, b].c \rangle = \langle c, e, 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

par \mathfrak{k} -invariance de \langle, \rangle . Par ailleurs, si $\pi \neq 0$,

$$t(\pi \circ \pi) = \langle \pi \circ \pi e, e \rangle = \langle \pi, \pi e, e \rangle = \langle \pi e, \pi e \rangle > 0.$$

Donc la forme t vérifie donc les hypothèses de 2.2.2, et (\mathfrak{p}, \circ) est une algèbre de Jordan.

2.2.8 Réciproquement, soit A une algèbre de Jordan munie d'une forme linéaire t telle que

$$t(x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z) = 0 \quad \text{et}$$

$$t(x^2) > 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

~~L'involution canonique de $L^0(A)$~~

Soit D^+ l'algèbre des dérivations de A respectant t et

$L^+(A)$ la sous-algèbre $D^+ \oplus A$ de $L^0(A)$, munie de l'involution

induite σ . (Elle agit sur A par la représentation ρ de 2.2.4)
~~l'involution σ est une involution de Cartan, car,~~
relativement à la forme quadratique $t(x^2)$, sur A on a

$$\rho(\lambda^\circ) = -\rho(\lambda)$$

~~$$\rho(\lambda) \in L^+(A) \implies \rho(\lambda^\circ) \in L^+(A) \implies \rho(\lambda) \in L^+(A) \implies \rho(\lambda) \in L^+(A)$$~~

C'est clair pour $\lambda \in D$, et pour $\lambda \in A$, on a

$$t(x(\lambda y)) = t((x\lambda).y)$$

par hypothèse. D'après ρ , l'orbite de e sous le groupe d'algèbre de Lie $L^0(A)$ est donc un cône homogène auto-adjoint.

Le cône C est l'ensemble des $\exp(p(a)) \cdot e$, soit l'ensemble des
 $\exp(R_a) \cdot e$ (pour $a \in A$)

D'après (7), la sous-algèbre engendrée par a est associative, et
 $\exp(R_a) \cdot e$ est $\exp(a)$, calculé dans cette ^{non-}algèbre :

$$C = \{ \exp(a) \mid a \in A \}$$

Dans A , la sous-algèbre engendrée par un élément est commutative,
associative ~~et associative~~, sans élément nilpotent (car $t(x^2) \neq 0$ pour $x \neq 0$) et
telle que ~~il n'y a jamais~~ $x^2 + y^2 \neq 0$ si $x, y \neq 0$ (car $t(x^2) \neq 0$). C'est
donc un produit de copies de \mathbb{R} , et, ~~cela~~

$$\exp(x) \exp(y) = \exp(x+y)$$

et dans A , les exponentielles sont les carrés des éléments inversibles.
~~Les carrés~~. Le cône C est donc encore l'ensemble des carrés des
éléments inversibles de A ; son adhérence est l'ensemble de tous les carrés.

2.2.9 La classification des cônes homogènes autoadjoints coïncide
donc avec celle des algèbres de Jordan sur \mathbb{R} tels qu'il existe
 $t : A \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de 2.2.8.

A Par récurrence sur n , on définit a^n ($a^0=1, a^1=a$),

et on montre que $a^p a^q$ ne dépend que de $p+q$ ($p, q > 0$); c'est a^{p+q}

Preuve: On applique l'id. $\sum_{r+s=n} (a^r a^s) = \sum_{r+s=n} a^r (a^s)$ à $a^p a^q a^r a^s$,

($p, q, r, s > 0$, π comm. pour $< p+q+r+s$)

(debut rec. 2 ok; 3 ok (trivialment))

$$\rightarrow a^{p+q+r+s} + a^{p+2} a^{q+s} + a^{p+1} a^{q+r+s} - a^p a^{q+r+s} - a^{p+1} a^{q+r+s} + a^2 a^{p+q+s} = 0$$

preuve de $a^r a^s = a^{r+s}$ (2+3 = p+q+r+s) ind. de r : récurrence sur r :

$p=1, q=1, r=1, s=1 \rightarrow$

$$a a^{n-1} + a a^{n-1} + a^2 a^{n-2} - a^2 a^{n-2} - a^{r+1} a^{n-r-1} - a^{r+1} a^{n-r-1} = 0$$

$r=1 \rightarrow a a^{n-1} = a^2 a^{n-2}$ } on conclut $a(a^{n-3} a^2) = (a a^{n-3}) a^2$

alors, pour $a^n = a a^{n-1}$: $a^n + a^2 a^{n-2} - 2 a^{r+1} a^{n-r-1} = 0$ et on conclut ($\frac{1}{2}$) par induction / r

B. $[R_{a^p}, R_{a^q}] = 0$

NB: pas d'autre rel. entre les R_{a^p}

on a $[R_{a^p}, R_{a^{q+2}}] + [R_{a^q}, R_{a^{p+2}}] + [R_{a^1}, R_{a^{p+q}}] = 0$

Si $\Delta_p = [R_{a^p}, R_{a^{n-p}}]$, cela donne:

$$\left. \begin{array}{l} 1) n-p+q+2=n, \Delta_p + \Delta_q + \Delta_2 = 0 \\ 2) \Delta_p = -\Delta_{n-p} \end{array} \right\} \Delta = 2/n \rightarrow A$$

d'où $\Delta = 0$

la: $[R_{a^p}, R_{a^q}]$ de appl $a^2 a^5$ donc: $\begin{array}{ccc|ccc} p & q+1+s & + & & & \\ q & p+1+s & + & & & \\ r & " & s & p+q+2 & & \end{array}$ $\rightarrow a^2 a^{p+q+2} = a^s a^{p+q+2}$
 Z: l'induction donne mal,

on montre $a a^3 = a^2 a^2$; même on il faut Jordan.

(Jordan $\Leftrightarrow [R_{a^k}, R_{a^l}]$ dériv. et $a a^3 = a^2 a^2$?)

2.3 Cônes dans \mathbb{R}^2

est (d'après Hodgebruch et Mumford)

2.3.1 Soient L un \mathbb{Z} -module libre de rang 2 orienté, $e \in \wedge^2 L$ la

classe d'orientation, $\begin{cases} V_{\mathbb{Q}} = L \otimes \mathbb{Q} \\ V = L \otimes \mathbb{R} \end{cases}$ et $C_{\mathbb{Q}} \subset V_{\mathbb{Q}}$ tel que

a) $x, y \in C_{\mathbb{Q}} \Rightarrow x + y \in C_{\mathbb{Q}}$

b) $x \in C_{\mathbb{Q}}, \lambda \in \mathbb{Q}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C_{\mathbb{Q}}$

il existe une forme linéaire > 0 sur $C_{\mathbb{Q}}$

c) $x \in C_{\mathbb{Q}} \Rightarrow -x \notin C_{\mathbb{Q}}$

d) $C_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$, et n'est pas réduit à une demi-droite.

Soit C le cône des combinaisons linéaires à coefficient réel > 0 d'éléments de $C_{\mathbb{Q}}$.

On a $C_{\mathbb{Q}} = C \cap L_{\mathbb{Q}}$; C est un secteur angulaire, limité par deux demi-droites l_1 et l_2 ,

ni $l_1 \subset C$, ni l_2 est rationnelle. On s'intéresse aux décompositions

localement finies de C en secteurs angulaires rationnels. Soit \mathcal{E} une

~~triangulation~~ Nous identifions une telle ^{triangulation} ~~triangulation~~ à l'ensemble localement

fini suivant E d'éléments de $L \cap C$; $n \in \mathbb{Z}$ est l'ensemble des demi-droites

bords des dits secteurs angulaires, E est et que pour $l \in E$, e_l est le

générateur de $l \cap L$, E est l'ensemble des e_l .

Indexons E par un intervalle (fini ou infini) I de \mathbb{Z} , e_i tournent

dans le sens positif quand i augmente $e_{i-1} \wedge e_{i+1} = a e_i$ avec $a > 0$. L'intervalle

I a un plus petit (resp plus grand) élément n et seulement n le premier

(resp second) côté l de C est rationnel; $l \cap L$ est alors engendré par e_i .

On dit que la triangulation E est liée si $e_{i-1} \wedge e_{i+1} = e_i$.

Nous ne considérons plus que des triangulations liées et les appellerons

simplement triangulations.

Constructions 2.3.2. (i) Si E est une triangulation et que $i, i+1 \in I$, on obtient une

nouvelle triangulation en ajoutant $e_i + e_{i+1}$ à E (éclatement du secteur

(e_i, e_{i+1}))

(ii) Les conditions $e_i = e_{i-1} + e_{i+1}$ et $e_{i-1} \wedge e_{i+1} = e_i$ sont équivalentes.

Si elles sont vérifiées, on dit que e_i est exceptionnel. On obtient alors une

nouvelle triangulation en ôtant e_i de E (contraction de e_i).

Une triangulation est dite minimale si elle est sans élément exceptionnel.

Proposition 2.3.3 e_i et e_{i+1} ne sont pas simultanément exceptionnels.

Si non, $e_{i+1} - e_i$ et $e_i - e_{i+1}$ seraient dans E , et C ne serait pas simple.

Proposition 2.3.4 Si C est tendu par une base (e_0, e_1) de L , toute triangulation de C se déduit de $\{e_0, e_1\}$ par une suite finie d'éclatements.

(avec $e_0, e_1 \in \mathbb{R}^2$)

Les côtés de C étant rationnels, E est fini, ~~on procède par récurrence sur le nombre d'éléments de E~~

(a) ~~Si $e_0, e_1 \in E$, alors~~ ^{si} $e_0 + e_1 \notin E$, alors $E = \{e_0, e_1\}$

Soient ~~soient~~ f et f' les éléments de E qui précèdent et suivent immédiatement $e_0 + e_1$:

$$f = \lambda e_0 + \mu e_1, \quad \lambda \geq \mu + 1,$$

$$f' = \lambda' e_0 + \mu' e_1, \quad \lambda' \leq \mu'$$

$$f \wedge f' = \pm e \quad , \quad \text{soit} \quad \lambda \mu' - \lambda' \mu = 1$$

Puisque $\lambda \mu' - \lambda' \mu \geq \lambda + \mu + 1$, on en tire que $\lambda' = \mu = 0$ et $e_0 = f, e_1 = f'$.

(b) On procède par récurrence sur le nombre d'éléments de E . Si $E = \{e_0, e_1\}$, on a gagné. Sinon, on note C' et C'' les cônes tendus par $(e_0, e_0 + e_1)$ et $(e_0 + e_1, e_1)$, et on applique l'hypothèse de récurrence à $C' \cap E$ et $C'' \cap E$.

Corollaire 2.3.4 Si E est minimal, $e_i \wedge e_j$ n'est égal à e que pour $j = i+1$.

Corollaire 2.3.5 Si E et E' sont deux triangulations, avec $E \subset E'$, E' se déduit de E par une suite localement finie d'éclatements.

Théorème 2.3.6 C a une et une seule triangulation minimale $E(C)$.

Toute triangulation ~~par récurrence~~ de C contient $E(C)$.

(a) Si C est rationnel, C admet une triangulation.

Supposons C tendu par e_0 et e_1 et prenons (a) par récurrence sur l'entier $a > 0$ tel que $e_0 \wedge e_1 = a e$. Si $a > 1$, il existe $f \in L$ à l'intérieur du parallélogramme tendu par e_0 et e_1 , et on applique

l'hypothèse de récurrence aux cônes tendus par (e_0, f) et (f, e_1) respectivement

(b) C admet une triangulation.

Il est clair que C admet une triangulation non nécessairement line.

La raffinement grâce à (a), on prouve (b).

~~(b) Si $E_0 \supset E_1 \supset \dots$ est une suite de triangulation~~

~~(b) Si $e_i \cap e_j = a$, avec $a > 0$, et que $\ell(a) \leq \delta$~~

(c) Pour tout $j \in I$, il existe un intervalle fini $J = [i, k]$ (resp. $[k, i]$) tel que

pour toute triangulation $E' \subset E$, un des ~~edges~~ e_j pour $j \in J$ soit dans E' .

Il suffit de prouver l'assertion non vérifiée. Pour Munissons V d'une quelconque structure euclidienne.

Soient e_{j_1} et e_{j_2} entre e_{j_1} et e_{j_2} vérifie l'angle $\angle(e_{j_1}, e_{j_2})$ est plus grand

$\epsilon \leq \theta \leq \pi - \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ convenable. Si $e_{j_1} \cap e_{j_2} = \emptyset$, e_{j_1} et e_{j_2} sont donc de longueur

bornée, et ~~il~~ parcourt une partie finie de I .

Il suffit de prendre δ le plus grand que les d_2 .

(d) L'intersection de deux triangulations est une triangulation.

Soient les triangulations E' et E'' . La preuve de (b) montre qu'il existe une triangulation E contenant E' et E'' . D'après 2.3.5, E' (resp. E'') se déduit de E par une suite ~~de~~ (peut-être infinie) de contractions "ôter $e_{i'}(a)$ " (resp. "ôter $e_{i''}(a)$ ")

$(a > 0)$ On prouve par récurrence sur (a, b) que $E_{a,b}$ déduit de E en ôtant

~~les~~ $e_{i'}(a)$ et les $e_{i''}(b)$ ($a \leq a, b \leq b$) est une triangulation, et que :

D'après 2.3.3, tant que $e_{i'}(a) \neq e_{i''}(b)$, $e_{i'}(a)$ n'est pas voisin de $e_{i''}(b)$.

Dès lors, $E - e_{i''}(b)$, $E' - e_{i''}(b)$, E'' sont encore trois triangulations, et

$E' - e_{i''}(b)$ se déduit de $E - e_{i''}(b)$ par la suite des contractions "ôter $e_{i'}(a)$ "

(avec $e_{i''}(b)$ inclus le cas échéant) et E'' se déduit de $E - e_{i''}(b)$ par la suite

des contractions "ôter $e_{i''}(a)$ " ($a > 0$). La suite de contractions

"ôter alternativement $e_{i'}(a)$ et $e_{i''}(a)$ aboutit à $E' \cap E''$ qui, d'après (c)

Théorème 2.3.6 Soient D l'enveloppe convexe de $C \cap L$, et $E(C) = \partial D \cap L$.
Alors, $E(C)$ est ^{l'unique} triangulation minimale de C , et toute triangulation de C
contient $E(C)$.

est donc une triangulation

On termine la démonstration en prenant pour $E(C)$ l'intersection des triangulations de C et en appliquant 2.3.5

Remarque 2.3.7. Soit $C^\pm(e)$ (resp. $C^+(e)$) tendu par ^{e et par} le premier (resp. second) côté de C . Si $e \in E(C)$, alors $E(C^\pm(e)) = E(C) \cap C^\pm(e)$.

Corollaire 2.3.8 Soit E une triangulation de C . Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) E est minimale

(b) $n_j > i+1$, $e_i \wedge e_j = a \in C$ avec $a \geq 2$,

(c) $\forall e_{i+1} - e_i \notin C$.

Il est clair que (c) \Rightarrow (a), et, d'après 2.3.5, que (a) \Leftrightarrow (b).

Que (a) \Rightarrow (c) résulte de 2.3.7 et du résultat suivant appliqué à $C(e_i)$.

Corollaire 2.3.9 Supposons le premier côté de C rationnel, tendu par e_0 . Les e_i de la triangulation minimale de C sont définis par récurrence par

$$e_i \wedge e_{i+1} = 1, \quad e_{i+1} \in C \text{ et } e_i \notin C.$$

Soit e_1 définie par ces formules. Alors, $\{e_0\} \cup E(C(e_1))$ est donc une triangulation minimale de C , et on conclut par récurrence.

Corollaire

Proposition 2.3.10 Si C et D ont même 2^e côté l_2 , $E(C)$ et $E(D)$ coïncident au voisinage de l_2 .

On se ramène à supposer que $C \subset D$ et que le premier côté de C est rationnel, tendu par e_0 . Soit $C = D^+(e_0)$ Soit $E = E(D^+(e_0)) \cup E(D^-(e_0))$.

Nous allons montrer que $E(D)$ se déduit de E par un nombre fini de

contractions. On ne peut en effet contracter e_i qu'après avoir contracté les e_j entre e_i et e_0 et, d'après 2.3.6 (cf 2.3.6 (c)), ce processus doit s'arrêter.

2.3.11 Si z est un nombre réel, nous noterons $\{z\}$ le plus petit entier tel que $\{z\} \geq z$. Définissons z_i et a_i par récurrence par

$$z_0 = z$$

$$a_i = \{z_i\} \quad (i \geq 0)$$

$$z_{i+1} = \frac{1}{a_i - z_i} \quad (i \geq 0)$$

Avec Hirzebruch, nous

On s'arrête si il y a lieu dès que $a_i = z_i$. On appellera la suite (a_0, a_1, \dots) le développement en fraction continue de z . On prendra garde que ce n'est pas la notion classique.

~~En outre, on a $a_i \geq 2$~~

On a

$$z = a_0 - 1/a_1 - 1/a_2 - \dots$$

$a_i \geq 2$ pour $i > 0$, et les a_i ne peuvent pas être tous ≥ 2 pour $i \geq 0$, car $2 - 1/2 - 1/3 \dots = 1$.

~~Proposition 2.3~~

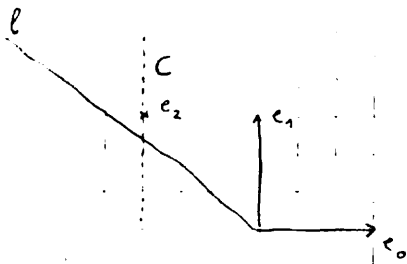
Proposition 2.3.11. Soient (e_0, e_1) une base de L , avec $e_0 \wedge e_1 = e$, z un nombre réel et l la demi-droite d'équations z qui s'écrit dans cette base

$$l: x + zy = 0, \quad x < 0$$

Soient C le cône tendu par e_1 et l , $E(C) = (e_1, e_2, \dots)$ la triangulation minimale de C et définissons a_i par

$$e_{i-1} \wedge e_{i+1} = a_i e \quad (i \geq 0)$$

Alors, (a_1, a_2, \dots) est le développement 2.3.11 de z en fraction continue.



Appliquons 2.3.9. Si $e_2 = -e_0 + a_1 e_1$, on a $e_0 \wedge e_2 = -1$. Puisque $e_2 = -e_0 + a_1 e_1$, on peut écrire $e_2 = -e_0 + a e_1$, et $a = a_1 = e_0 \wedge e_2 = a e_1$; a est le plus petit entier tel que $-e_0 + a e_1 \in C$, en d'autres termes, $a_1 = \lceil 1 \rceil$. Dans la base (e_1, e_2) , l'équation de l est $x + z_2 y = 0$, et on continue par récurrence.

Corollaire 2.3.12 Pour que deux nombres $z_1^{(1)}$ et $z_2^{(2)}$ de développement en fraction continue $(a_1^{(1)}, \dots)$ et $(a_1^{(2)}, \dots)$ l'un de l'autre par une substitution $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, il faut et il suffit que $a_{l_1+k}^{(1)} = a_{l_2+k}^{(2)}$ pour l_1 et l_2 commensurables.

C' est une traduction de 2.3.10

Proposition 2.3.13 Les conditions suivantes sont équivalentes

- (a) Le groupe des automorphismes de $(L$ orienté, $C)$ est ~~isomorphe à~~ ^{non trivial [il est des]} ~~isomorphe à~~ \mathbb{Z} infini.
- ~~(a') le groupe des automorphismes de $(L$ orienté, $C)$ est cyclique infini.~~
- (b) Il existe une forme quadratique indéfinie rationnelle Q , telle que C soit l'une des ^{deux} composantes connexes de $Q > 0$, _(ne représentant pas 0)

(b) \Rightarrow (a) : résulte du théorème des unités de Dirichlet pour le corps quadratique réel attaché à \mathbb{Q} .

(a) \Rightarrow (b) : les côtés de C sont vecteurs propres de tout automorphisme σ , donc leur coefficients directeurs sont ^{les} racines d'une équation quadratique.

De plus, ils ne peuvent être rationnels.

2.3.14 Supposons vérifiées les conditions équivalentes de 2.3.13. La triangulation maximale $E(C)$ est stable par tout automorphisme de (L, C) ; les nombres a_i tel que $e_{i-1} \wedge e_{i+1} = a_i \cdot e$ forment donc une suite périodique. D'après 2.3.10 et 2.3.13, la période peut se calculer comme suit :

(a) Dans une base orientée quelconque de L , on écrit l'équation de la droite support du 2^e côté de C sous la forme $x + ay = 0$

(b) On prend le développement en fraction continue de a_i (b_0, b_1, \dots) de a_i . Pour i assez grand, la suite b_{i+k} est périodique, elle a même période que la suite des a_i .

Corollaire 2.3.15. Le développement en fraction continue d'une inconnue quadratique est périodique, sauf pour les premiers termes.

Remarque 2.3.16. Dans une base commensurable, si (a_1, \dots, a_n) est la période de la suite (a_i) , le générateur σ du groupe des automorphismes de $(L$ orientée, $C)$ tel que $\sigma e_i = e_{i+1}$ a pour matrice, dans la base (e_0, e_1) , ~~est le composé sériel, dans la~~ le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \circ \dots \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Si σ_i est défini par $\sigma_i(e_{i-1}) = e_i$ et $\sigma_i(e_i) = e_{i+1}$, on a en effet

$$\sigma = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_1$$

et σ_i est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix}$ dans la base (e_{i-1}, e_i) .

§ 3 Etude de l'infini

3.1 Racines

(d'après Harish-Chandra §; cf Helgason Ch VIII)

3.1.1 Soient M un domaine hermitien symétrique (1.2.9) de rang 2 (1.2.22), et $G, \underline{G}, \underline{G}_1$ comme en 1.4.13. On fixe $o \in M$.

Le point o définit $h_o: U^1 \rightarrow \underline{G}_1$. On note σ l'involution de Cartan $\text{ad } h_o(-i)$, \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de \underline{G} (resp \underline{G}_1) et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de \mathfrak{g} définie par σ , l'algèbre \mathfrak{k}_1 et l'algèbre de Lie du centralisateur \mathfrak{k}_2 de h_o et \mathfrak{p} s'identifie à l'espace tangent à M en o .

La structure complexe J est $\text{ad } h_o(e^{2\pi i/8})|_{\mathfrak{p}}$. Le morphisme h_o définit une structure de Hodge de poids 0 sur l'espace \mathfrak{g} de la représentation adjointe. Posant $\mathfrak{p}^+ = F^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et $\mathfrak{p}^- = \overline{\mathfrak{p}^+}$, on a

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-.$$

3.1.2 Nous noterons $h_{\#}^{SL}$ le morphisme

$$h_{\#}^{SL}: U^1 \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) : e^{i\theta} \mapsto \text{rotation d'angle } \theta.$$

Soit $s \geq 0$.

Nous noterons $h_{\#}^{USL}$ l'application (ou, si cette notation est ambiguë, $h_{\#}^{USL, s}$)

$$\text{l'application } h_{\#}^{USL}: U^1 \rightarrow U^1 \times SL(2, \mathbb{R})^s$$

de composantes l'identité et s fois $h_{\#}^{SL}$.

3.1.3 Soit \mathfrak{a} une sous-algèbre commutative maximale de \mathfrak{p} . Le théorème suivant, fondamental pour l'étude des transformations de Cayley, sera prouvé en 3.1.19.

Théorème 3.1.4 Il existe un morphisme

$$\psi: U^1 \times SL(2, \mathbb{R})^s \rightarrow \underline{G}_1$$

tel que

Why $-i$?
 $\text{Ad } h_o(-i) = 0$
 so same as
 $\text{Ad } h_o(i)$

(a) $d\mathfrak{g}$ inclut un sous-système de la sous-algèbre de Cartan standard de $sl(2, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ (matrices diagonales) avec a ;

(b) $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{h}_1^{USL^{\mathbb{Z}}}$.

Remarque 3.1.5 On a

$$d\mathfrak{g}(sl(2, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}) = a + \mathbb{J}a + [a, \mathbb{J}a] ;$$

~~car $d\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1^{USL^{\mathbb{Z}}}$ et que la formule ci-dessus on le vérifie par réduction au cas du groupe $U^1 \times SL(2, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$. est correcte pour $SL(2, \mathbb{R})^1$.~~

3.1.6 Les représentations ^{réelles} irréductibles de U^1 sont les suivantes :

ρ_0 : la représentation triviale de U^1 ;

ρ_k : la représentation de dimension deux ^{de U^1} , ~~de complexifiée~~ somme des représentations de dimension un ~~de caractères~~ z^k et \bar{z}^k ;

Soit σ_1 la représentation évidente (de dimension deux) de $SL(2, \mathbb{R})$ et soit σ_k sa puissance symétrique k -ième. Les représentations réelles irréductibles de $SL(2, \mathbb{R})$ sont les σ_k ($k \geq 0$). Les représentations sont absolument irréductibles. Toute représentation réelle irréductible de $U^1 \times SL(2, \mathbb{R})$ s'écrit donc comme un produit tensoriel externe

$$\rho_i \otimes \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_r}$$

Décomposons la représentation adjointe \mathfrak{g} en représentations irréductibles de $U^1 \times SL(2, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$. Sur l'espace de la représentation σ_r , $U^1 \subset SL(2, \mathbb{R})$ agit par les caractères $z^p \bar{z}^q$ ($p+q=r$, $p \geq 0, q \geq 0$), ~~resp par~~ les caractères z^i ($-r \leq i \leq r$, $r \equiv i \pmod{2}$). Puisque U^1 agit sur \mathfrak{g} agit que par les caractères $z^2, 1$ et z^{-2} , les représentations $\rho_i \otimes (\sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_r})$ qui figurent dans \mathfrak{g} vérifient

Le sont au plus les suivantes

$$(a_i) \mathfrak{p}_0 \otimes (\sigma_0 \otimes \dots \otimes \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_0) \quad (\sigma_2 \text{ en la } i\text{-ème place, } 1 \leq i \leq r)$$

Soit g_i l'image par $d\varphi$ de l'algèbre de Lie du i -ème facteur $SL(2, \mathbb{R})$.

Alors, $g_i \subset g$ est l'unique sous-représentation de g de ce type :

s'il y en avait une autre v , les vecteurs de v fixes sous a seraient dans \mathfrak{p} , et a ne serait pas commutative maximale.

$$(b)_{i,j} \mathfrak{p}_0 \otimes (\text{des } \sigma_0, \text{ et } \text{des facteurs } \sigma_1 \text{ en les } i\text{-ème et } j\text{-ème places}) \quad (i < j)$$

$$(c)_i \mathfrak{p}_1 \otimes (\sigma_0 \otimes \dots \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_0) \quad (\sigma_1 \text{ en la } i\text{-ème place})$$

$$(d) \mathfrak{p}_2 \otimes (\text{trivial})$$

$$(e) \mathfrak{p}_0 \otimes (\text{trivial})$$

Soit R un système de racines. Une racine $\alpha \in R$ est dite

longue si, pour toute racine β dans la même composante irréductible de

R que α , on a $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$

Si M est simple de \mathfrak{g}
Corollaire 3.7.7 ~~le système de racines relatif~~ est
 de type C ou BC. Les racines longues correspondent aux $g_i \subset g$

Soient $\pm \alpha_i$ les racines de a dans g_i . Il existe dans l'image de

par φ du i -ème facteur $SL(2, \mathbb{R})$ un élément w qui normalise a ,

transforme α_i en $-\alpha_i$ et respecte les α_j pour $j \neq i$. Soit s_i la

réflexion $ad w$ de a . Alors, s_i appartient au groupe de Weyl W . Les α_i

sont donc orthogonaux entre eux. D'après (3.7.6), les autres racines sont
 parmi les suivantes

$$(b)_{i,j} \rightarrow \text{racines } \frac{1}{2} (\pm \alpha_i \pm \alpha_j)$$

$$(c)_i \rightarrow \pm \frac{1}{2} \alpha_i$$

Le groupe de Weil W est engendré par les réflexions par rapport aux racines, sont encore par les s_i et par des symétries qui échangent deux racines et fixent les autres. ^{Principe} ~~Si~~ M est simple, W agit irréductiblement sur \mathfrak{a} . D'après le lemme ^{3.1.8 ci-dessus} ~~ci-dessus~~, ~~la~~ ~~démonstration est laissée au lecteur~~, W contient le groupe symétrique agissant sur \mathfrak{a} en permutant les α_i . Dès lors, W est le groupe des automorphismes de \mathfrak{a} qui respectent

l'ensemble des $\pm \alpha_i$, les $\frac{1}{2}(\pm \alpha_i \pm \alpha_j)$ sont tous racines, et soit les $\pm \frac{1}{2} \alpha_i$ sont tous racines, soit aucun des $\pm \frac{1}{2} \alpha_i$ n'est racine. Dans le premier cas, le système de racines relatif est réduit, et admet pour racines simples les

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2), \dots, \frac{1}{2}(\alpha_{r-1} - \alpha_r), \alpha_r$$

Il est de type C . Dans le ^{second} ~~premier~~ cas, les moitiés des racines longues (les α_i) sont encore racines, et il est de type BC .

Lemme Soient L un ensemble fini, et T un ensemble de transpositions de L . Si tous les éléments de L sont équivalents pour la relation d'équivalence engendrée par "la transposition (a, b) est dans T ", alors T engendre le groupe symétrique de L .
La démonstration est laissée au lecteur.

3.1.9 Nous noterons w^{SL} le morphisme

$$w^{SL} : G_m \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) : \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Pour $s \in \mathbb{Z}$, nous noterons $w_s : G_m \rightarrow G_1$ l'application composée

$$w_s = \varphi \circ (1, w^{SL}, \dots, w^{SL}, e, \dots, e) \quad (s \text{ fois } w^{SL})$$

et ${}_s W$ la filtration correspondante de G_1 (1.3). Les notations ne sont utiles que pour M simple, cas auquel nous nous restreignons. On a

$$\langle \alpha_i, w_s \rangle = \begin{cases} 2 & \text{si } i \leq s \\ 0 & \text{si } i > s \end{cases}$$

de sorte que w_s annule tous les racines simples α_i , sur

$\frac{1}{2}(\alpha_s - \alpha_{s+1})$ (pour $0 < s < 2$) ou α_2 (pour $s=2$). Pour $0 < s \leq 2$, $W(\underline{G}_1)$

et donc un sous-groupe parabolique maximal de \underline{G}_1 , et chaque classe de conjugaison de parabolique maximal de \underline{G}_1 est ainsi obtenue une fois et une seule.

le groupe \underline{G}' est un quotient de $G_m \times \underline{G}_1$. Mais

notons w'_s le morphisme $w'_s : G_m \rightarrow \underline{G}'$ déduit du morphisme

à valeurs dans $G_m \times \underline{G}_1$ de composantes $x \mapsto x^{-1}$ et w_s . ~~Notons encore~~ ^{Notons encore} la filtration correspondante de \underline{G}' .

~~Notons encore~~ ^{Notons encore} W , défini ~~comme la parabolique~~ maximal de \underline{G}' de trace $W(\underline{G}_1)$ sur \underline{G}_1 .

Définition 3.1.10 Une filtration W de \underline{G}' (1.3) est dite de Cayley si

pour toute représentation ρ de \underline{G}' de ^{d'un poids} (V, ρ) et tout $\alpha \in M$, ρ

(V, F_α, W) est une structure de Hodge mixte.

Soit W une filtration de \underline{G}' , définie par $w' : G_m \rightarrow \underline{G}'$.

Pour que W soit de Cayley, il faut que w' soit $\lambda \mapsto \lambda^{-2}$, ~~ce que~~ ^{ce que} $w = w_0^{-1} w'$ soit à valeurs dans \underline{G}_1 . On le

voit en utilisant ~~3.1.10~~ ^{3.1.10} sur $R(\mathfrak{g})$ (1.4.11). Si

$(R(\mathfrak{g}), F, W)$ est de Hodge mixte, ~~alors~~ ^{alors} $R(\mathfrak{g})$ est en effet purement de

W -filtration ~~-2~~.

Soient (V_i, ρ_i) une ^(famille de) représentations de poids n_i de \underline{G}' . ~~et~~

~~la restriction de ρ à \underline{G}_1 .~~

Proposition 3.1.11. Supposons ^{(l'intersection des noyaux} $\bigcap \text{Ker}(\rho_i)$ ~~est~~ ^{finie}. ~~Si~~ $R(\mathfrak{g})$ ~~est~~ ^{est}

~~purement de~~ ^{est} ~~filtration~~ ^{filtration} ~~-2~~, ~~et que~~ ^{et que} \forall pour un $\alpha \in M$, les

(V_i, F_α, W) ^{sont} ~~est~~ de Hodge mixte, alors W est de Cayley.

(3.1.12.2) Soient (V_i, F_i) comme plus haut ~~énoncé~~, avec $V_i \neq \{0\}$.
 Pour que $(V_1 \otimes V_2, F_1 \otimes F_2)$ soit de Hodge de poids n , il faut et il suffit que pour n_1 et n_2 convenables vérifiant $n = n_1 + n_2$, (V_i, F_i) soit une structure de Hodge de poids n_i .

Preuve. Si un espace vectoriel ~~(Hodge)~~ X est muni de deux filtrations G_1 et G_2 , il existe toujours une bigraduation $X^{a,b}$ de X telle que $G_1^\alpha(X) = \bigoplus_{a \leq \alpha} X^{a,b}$ et $G_2^\beta(X) = \bigoplus_{b \leq \beta} X^{a,b}$. Appliquons ce fait aux (V_i, F_i, \bar{F}_i) ; l'hypothèse assure que pour $V_1^{a,b} \neq 0$ et $V_2^{c,d} \neq 0$, on a $a+b+c+d = n$. Dès lors, ~~soit~~ pour $V_1^{a,b} \neq 0$ ~~soit~~ $a+b$ a une ~~seule~~ valeur fixe n_1 . De même pour V_2 . L'assertion en résulte.

(3.1.12.3) Soient (V_i, F_i) comme plus haut, et W_i une filtration croissante de V_i . Pour que $(V_1 \otimes V_2, F_1 \otimes F_2, W_1 \otimes W_2)$ soit de Hodge mixte, il faut et il suffit que les (V_i, F_i, W_i) le soient.

~~Preuve de (3.1.11.1)~~ Clair par (3.1.11.1).

(3.1.12.4) Soient (V_i, F_i, W_i) comme plus haut, avec $V_i \neq \{0\}$. Pour que $(V_1 \otimes V_2, F_1 \otimes F_2, W_1 \otimes W_2)$ soit de Hodge mixte, il faut et il suffit que, pour n convenable, $(V_1, F_1, W_1[n])$ et $(V_2, F_2, W_2[-n])$ le soient.

Ceci résulte de 3.1.11.2 et achève la démonstration de 3.1.11.

Proposition 3.1.13. Supposons M simple. Les filtrations de Cayley de \underline{G}' sont les conjugués des filtrations ${}_s W$ de 3.1.9

Provenons que ${}_s W$ est une filtration de Cayley. ~~et~~

Définissons $\varphi: U_1 \times SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \underline{G}_1$ comme étant le composé

$$U_1 \times SL(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\begin{matrix} \text{sur } U_1 : (h, e, \dots, e, h^{SL}, \dots, h^{SL}) \\ \text{sur } SL : (e, \underbrace{h, \dots, h}_{s \text{ fois}}, \underbrace{e, \dots, e}_{2-s \text{ fois}}) \end{matrix}} U_1 \times SL(2, \mathbb{R})^2 \xrightarrow{\varphi} \underline{G}$$

(en cascade)

On a Notant w^{USL} le morphisme $(1, w^{SL}) : \underline{G}_m \rightarrow U^1 \times SL(2, \mathbb{R})$,

on a

$$\varphi \circ h^{USL} = h_0 \quad \text{et}$$

$$\varphi \circ w^{USL} = w_s$$

Ceci nous ramène au cas du groupe $U_1 \times SL(2, \mathbb{R})$. Nous allons

appliquer le critère 3.1.17 à ce groupe et aux ~~aux~~ représentations de poids -1

concomitant \mathbb{Z})

le groupe \underline{G}'

~~pour~~ dont les restrictions à $U_1 \times SL(2, \mathbb{R})$ sont respectivement

a) $\rho_1 \otimes \sigma_0$: ici, l'espace V de la représentation est purement de \mathbb{F} ,

W -filtration -1, et (V, F_2) est une structure de Hodge de poids -1.

b) $\rho_0 \otimes \sigma_1$: ici, (V, F, W) est de Hodge mixte, de type

$\{(-1, -1) (0, 0)\}$. Ceci exprime que ~~$W^{-2}(V) \neq F^0(V)$~~ $W^{-2}(V) \neq F^0(V)$

(ces sous-espaces de dimension un sont l'un réel, l'autre non), de sorte

que $W^{-2}(V) \cap F^0(V) = 0$ et $W^{-2}(V) \oplus F^0(V) = V$.

Réciproquement, soit W une filtration de Cayley, définie par

$w': \underline{G}_m \rightarrow \underline{G}'$. Soit $w = w' \circ w_0^{-1} : \underline{G}_m \rightarrow \underline{G}_1$. Quitte à remplacer W

par une filtration conjuguée, on peut supposer que ~~so~~ ~~envoie~~ \mathcal{A}

l'image de w est dans le tore déployé \underline{A} d'algèbre de Lie \mathfrak{a} . Soit

α une racine longue de \underline{A} et soit $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}$ la sous-~~groupe~~ ^{algèbre} isomorphe

à $sl(2)$ concomitante. ~~\mathfrak{g}^α est regardé comme une représentation~~

Regardons \mathfrak{g} comme une représentation de $U_1 \times SL(2, \mathbb{H})^2$ (par $\text{ad } \varphi$);
 alors, $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^d$ est facteur direct dans \mathfrak{g} . D'après (3.1.12.3), $(\mathfrak{g}^d, F_\alpha, W)$ est
 donc de Hodge mixte. La

structure de ~~Hodge~~ Hodge F de \mathfrak{g}^d est de type $(-1, 1)(0, 0)(1, -1)$; si $k = \langle d, w \rangle$
~~la~~ \mathbb{C}^w soit $k=0$, soit les \mathbb{C}^w ou \mathbb{R}^w $G_k^w(\mathfrak{g}^d)$ non nuls correspondent
 à $n = k, 0, -k$, et sont de dimension un. Les nombres de Hodge $h^{p,q}$
 de (\mathfrak{g}^d, F, W) vérifient alors

$$\sum_q h^{p,q} = 1 \quad (p = -1, 0, 1)$$

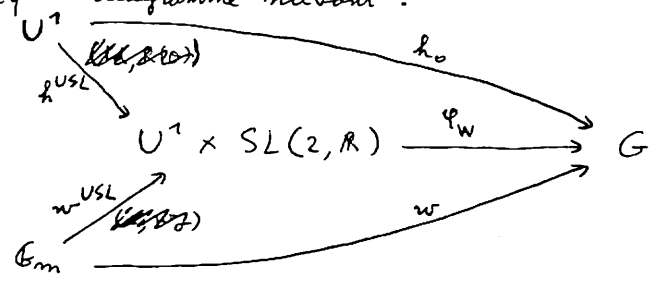
$$\sum_{p+q=l} h^{p,q} = 1 \quad (l = -k, 0, k).$$

Ceci impose $k = \pm 2$. On a donc $\langle d, w \rangle = 0$ ou ± 2 , et w est
 conjugué à l' un des w_i .

3.1.14. Canonification Soit W une filtration de Cartan de G' . Puisque $G = K \cdot W(G)$, W est donc conjugué à $\bigcap_{i=1}^m W_i$ par un élément de K . Il existe donc $w: G_m \rightarrow G_1$ qui définit W et tel que $\text{Im}(dw) \subset \mathfrak{p}$ (les conjugués de w , par $h \in K$ ont cette propriété). En d'autres termes

(3.1.14.1) $\sigma \cdot w = w^{-1}$

Le w est unique, à \pm près ainsi qu'il résulte de $W_i(g) \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ (les éléments de \mathfrak{p} sont semi-simples). Le w , et h se factorisent canoniquement à travers $U^1 \times SL(2, \mathbb{R})$: il existe un et un seul réel φ_w rendant commutatif le diagramme suivant :



3.1.15 Puisque (g, F_0) est une structure de Hodge de type $\{(-1, 1)(0, 0)(0, -1)\}$, les nombres de Hodge non nuls de la structure de Hodge mixte (g, F_0, W) vérifiant $|p|, |q| \leq 1$. En particulier, si g^i est la graduation de g définie par w , on a $g = \bigoplus_{|i| \leq 2} g^i$. Soit $g^{\text{pair}} = \bigoplus g^{2i}$ la sous-algèbre de Lie de g centralisateur de w . Nous posons :

$g^{\text{pair}} = \bigoplus g^{2i} = \text{centralisateur de } w(-1) ;$
 $g_t^0 = [g^2, g^{-2}] \quad \text{et} \quad g_t = g^{-2} \oplus g_t^0 \oplus g^2 ;$
 $g_x = \text{l'orthogonal de } g_t^0 \text{ dans } g^0 .$

On vérifie que g_t est une sous-algèbre de Lie de g . ~~Il contient~~ ~~l'algèbre~~ $(sl(2, \mathbb{R}))$ Puisque $g_x \subset g^0$, on a $[g_x, g^2] \subset g^2$. L'invariance de la forme de Killing B fournit

$B([g_x, g^2], g^{-2}) = B(g_x, [g^2, g^{-2}]) = B(g_x, g_t^0) = 0$

Puisque B met en dualité g^i et g^{-i} , on a ~~donc~~ $[g_x, g^2] = 0$. De même, $[g_x, g^{-2}] = 0$, et donc $[g_x, g_t] = 0$.

L'algèbre $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est stable par σ , donc réductrice, et engendrée par ses
 ses nilpotents, donc semi-simple. Son centralisateur est donc contenu
 dans son orthogonal, et $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^{\text{nil}}$ est le centralisateur de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^0$. En particulier, c'est
~~une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . R image de $d(\varphi|_{U^1})$ est dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^{\text{nil}}$. On a~~
 Ceci prouve l'assertion (i) de la proposition suivante. La vérification de (ii) est
 laissée au lecteur.

Proposition 3.1.16 (i) On a $\mathfrak{g}^{\text{pari}} = \mathfrak{g}_\mathbb{R} \times \mathfrak{g}_\mathbb{R}^{\text{nil}}$ (isomorphisme d'algèbres de Lie)
 (ii) $d\varphi_w$ envoie l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ (rap U^1) dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ (rap $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^{\text{nil}}$)

Nous venons plus tard que $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ correspond à un domaine
 hermitien symétrique tube.

3.1.17. Examinons la relation entre les systèmes de racines absolus
 et relatif de G . Comme en 3.1.3) nous 1.6

notons \mathfrak{g}^i l'image par $d\varphi$ de l'algèbre de Lie du \mathbb{C} -facteur $SL(2, \mathbb{R})$ de \mathfrak{g} .
 $U^1 \times SL(2, \mathbb{R})^2$.

~~Soient~~ Soient $\mathfrak{t}_1 = [a, Ja] = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ une sous-algèbre
 commutative maximale contenant \mathfrak{t}_1 . Les complexifiées de a et \mathfrak{t}_1
 sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Elles sont donc conjuguées
 par un élément c de $\Psi(SL(2, \mathbb{C})) \subset G_\mathbb{C}$: $c a_\mathbb{C} c^{-1} = \mathfrak{t}_1 \mathbb{C}$.

La conjugaison par c transforme l'ensemble des racines de a en
 l'ensemble des restrictions non nulles à \mathfrak{t}_1 des racines de \mathfrak{t} . ~~blabla~~

On lit sur 3.1.3 que $\oplus g_i$ est la somme de a et des sous-espaces radiciels de g relatifs aux racines longues de a . L'énoncé analogue pour t_1 montre que $\oplus g_i$ est déterminé par t_1 , donc est normalisé par le normalisateur de t_1 . En particulier, les g_i sont stables sous t . Soient $\pm \tilde{\alpha}_i$ les racines correspondantes. Alors, $H_{\tilde{\alpha}_i}$ sont dans t_1 et $\tilde{\alpha}_i$ s'annule sur l'orthogonal de t_1 dans t . Dans la représentation adjointe de g sur g , la représentation σ_2 de g_i n'apparaît qu'une fois ($g_i \subset g$), et les σ_k ($k \geq 2$) aucune. Les $\tilde{\alpha}_i$ sont longues et deux à deux orthogonales, donc fortement orthogonales. Elles sont non compactes (ne sont pas des racines de t dans \mathfrak{h}).

$c a c^{-1}$

dans g_i , donc

$c(\alpha_i) = \pm \tilde{\alpha}_i |_{t_i}$

3.1.5

ci-dessous
 $\tilde{\alpha}_i$ est une racine longue. ~~Une racine est dite longue si~~

Lemme 3.1.18 Soient $g_{\mathbb{C}}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $t_{\mathbb{C}}$ une sous-algèbre de Cartan de $g_{\mathbb{C}}$ et Φ le système de racines de $t_{\mathbb{C}}$. Pour $\alpha \in \Phi$, soit $g_{\alpha, \mathbb{C}}$ la sous-algèbre $\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de $g_{\mathbb{C}}$ engendrée par les sous-espaces radiciels e_{α} et $e_{-\alpha}$. Pour que α soit longue, il faut et il suffit que, dans la représentation adjointe de $g_{\alpha, \mathbb{C}}$ sur g , la représentation σ_2 n'apparaisse qu'une fois (pour $g_{\alpha, \mathbb{C}} \subset g_{\mathbb{C}}$), et σ_k ($k > 2$) aucune.

Il suffit de le vérifier par exemple en rang 2. On le fait cas par cas.

3.1.19 Preuve de 3.1.1 Soit t une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . Elle contient l'image de $d\mathfrak{h}$, et est une sous-algèbre de Cartan de g (car le centralisateur de cette image de $d\mathfrak{h}$ est \mathfrak{h}). Soit Φ le système de racines de $t_{\mathbb{C}}$ agissant sur $g_{\mathbb{C}}$ et reprenons les notations $e_{\alpha}, g_{\alpha, \mathbb{C}}$ de 3.1.6.

Soient $\Phi^+, \Phi^-, \Phi^0 \subset \Phi$ les racines qui figurent dans $\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Puisque \mathfrak{p}^+ est commutatif, dans Φ^+ , l'orthogonalité équivaut à l'orthogonalité forte.

pour $\alpha \in \Phi^+$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha, \mathbb{C}}$ est isomorphe à $SL(2, \mathbb{C})$.

Pour toute racine $\alpha \in \Phi^+$, choisissons $E_\alpha \in \mathfrak{e}_\alpha$, et posons $X_\alpha = E_\alpha + \bar{E}_\alpha$. C'est un générateur du sous-espace complexe de dimension un $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{p}$ de \mathfrak{p} .

Lemme 3.1.7.1 Soit $\Delta' \subset \Phi^+$ et $s = \#\Delta'$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) Les X_α ($\alpha \in \Delta'$) commutent entre eux, et le centralisateur ~~de~~ de $\mathfrak{a}' = \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathbb{R} X_\alpha$ est somme de \mathfrak{a}' et du centralisateur de $\bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha$ dans \mathfrak{p}
- (ii) Le centralisateur \mathfrak{z} de \mathfrak{a}' dans \mathfrak{g} est somme de \mathfrak{a}' et du centralisateur de \mathfrak{p} dans $\bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha$ dans \mathfrak{g}
- (iii) Les $\alpha \in \Delta'$ sont des racines longues deux à deux orthogonales

Il est clair que (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i). Admettons (i). De

$[X_\alpha, X_\beta] = [E_\alpha, E_\beta] + [E_{-\alpha}, E_\beta] = 0$, on tire que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$. Il existe donc

$$\varphi: SL(2, \mathbb{R})^s \longrightarrow G$$

tel que $d\varphi$ identifie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^s$ à $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{g}_\alpha$. La structure de Hodge de $SL(2, \mathbb{R})$ induite par celle de \mathfrak{g} provient de

$$h': U' \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})^s \quad (\text{diagonal})$$

et il existe φ prolongeant φ' :

$$\varphi: U' \times SL(2, \mathbb{R})^s \longrightarrow G$$

vérifiant la condition (b) de 3.1.1. Les calculs de 3.1.3 n'utiliseraient pas

~~de~~ Décomposons \mathfrak{g} comme en 3.1.3. L'hypothèse (i) assure encore que la représentation $(\alpha)_i$ de 3.1.3 n'apparaît qu'une fois, ^{donc} ~~donc~~ que la représentation σ_2 de \mathfrak{g}_α n'apparaît qu'une fois, et σ_k ($k > 2$) aucune. ~~Et~~ Par 3.1.18

α est longue, et (i) \Rightarrow (iii).

Notons (*) la condition

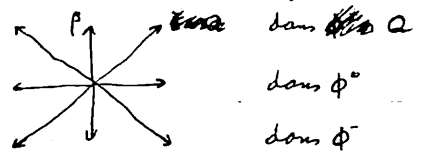
(*) Δ' vérifie les conditions équivalentes de 3.1.7.1.

Si $\Delta' \subset \Phi^+$ vérifie (*), on a $s = \dim \mathfrak{a}' \leq 2$. Nous prouvons en 3.1.19.3 ci-dessous que, si Δ' est maximal, $s = 2$. La démonstration précédente prouve alors 3.1.1

Lemme 3.1.1. Soient $\Delta \subset \Phi^+$ vérifiant (*), Q l'ensemble des racines

$\beta \in \Phi^+$ (fortement) orthogonales à Δ et $\beta \in Q$. Si $\Delta \cup \{\beta\}$ ne vérifie pas (*), il existe dans

Φ un sous-système de racines ~~de type B_2~~ de type B_2 comme suit :



En particulier, β est plus courte qu'une autre racine de Q , et n_1 est minimale dans Q par un ordre sur les racines.

Par (*) mis sous forme 3.1.19-1 (i),

Soit \mathfrak{z} le centralisateur de $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ dans \mathfrak{g} . L'hypothèse sur ρ équivaut à :

- Dans la représentation \mathfrak{z} de \mathfrak{g}_ρ figure une ~~autre~~ représentation ^{irréductible} non triviale de dimension impaire ^{autre} que $\mathfrak{g}_\rho \subset \mathfrak{z}$. De plus, puisque \mathfrak{t} normalise \mathfrak{z} , on peut supposer celle-ci engendrée par un E_β , $\beta \in Q$ \underline{x} stable par \mathfrak{t} .
 Si E_β est le vecteur dominant de \underline{x} ($[E_\beta, E_\beta] = 0$), la situation est nécessairement celle décrite dans le lemme.

Lemme 3.1.19.3 Les parties $\Delta \subset \Phi^+$ vérifiant (*) ~~maximales~~ ^(*) ~~maximales~~ ont ≤ 2 éléments.

D'après 3.1.19.2, il suffit de prouver que si Δ a $s < 2$ éléments, $Q \neq \emptyset$.

Le centralisateur de \mathfrak{a}' dans \mathfrak{p} contient en effet strictement \mathfrak{a} , puisque $\dim \mathfrak{a}' = s < 2$. Le centralisateur de $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ dans \mathfrak{p} est ^{donc} non trivial, les racines correspondantes sont dans Q .

Corollaire 3.1.20 Les parties $\Delta \subset \Phi^+$ vérifiant les conditions de 3.1.19.1 (*) ~~maximales~~ sont conjuguées sous le groupe de Weil de \mathfrak{t} dans K . Si M est simple, toute permutation de Δ est induite par un élément de W .

82

Soit $t \in \mathfrak{k}$, et $\Delta \subset \Phi^+$ système (*) maximal. La donnée de Δ équivaut à celle de $t_1 = t \cap \mathfrak{g}_\alpha : \pm \Delta$ et l'ensemble des racines longues qui s'annulent sur l'orthogonal de t_1 . Si a est une sous-algèbre commutative maximale dans $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{p}$, on a $t_1 = [a, \mathfrak{J}a]$. Puisque la sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{k}a$ de \mathfrak{p} est unique à K -conjugaison près, que a détermine t_1 , et que t_1 détermine t à conjugaison près par le centralisateur de t_1 dans K , (t, t_1) est unique à K -conjugaison près, donc (t, Δ) est unique à K -conjugaison près. Ceci prouve la première assertion.

Le normalisateur de a dans K normalise t_1 ; puisque les $t > t_1$ sont conjugués sous le centralisateur de $\mathfrak{k}a$ dans K ($t = t_1 + t_1^+$, avec t_1^+ un tore maximal dans ce centralisateur), le normalisateur de a et t dans K s'envoie sur le groupe de Weil de a . Mais \mathfrak{k} permute les \mathfrak{g}_α , donc les $\alpha \in \Delta$, comme il permute les paires de racines longues opposées de a , et la seconde assertion résulte de 3.1.4.

3.2.1 Dans ce n°^o, nous explicitons le cas fondamental où M est le disque unité.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2. L'ensemble des structures complexes sur V a deux composantes connexes; ~~elles~~ dans ~~les~~ structures complexes sont dans la même composante si et seulement si elles définissent la même orientation ^{de V} et elles sont alors conjuguées sous le groupe $SL(V)$. Nous supposons choisie l'une de ces deux composantes. Les structures complexes qui y appartiennent seront dites positives, les autres étant dites négatives.

Soient G le groupe de Lie complexe $PSL(V)$, \underline{G} le groupe algébrique $PGL(V)$ et \underline{G}_1 son revêtement double $SL(V)$. Soient J_0 une structure complexe positive sur V et $u_0: U^1 \rightarrow G$ le morphisme

$$z \mapsto \text{image dans } G \text{ de la multiplication par } \pm \sqrt{z} \quad (\text{rel. à } J_0).$$

Via u_0 , U^1 agit sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \text{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ que par les caractères $1, z, \bar{z}$; le centralisateur de u_0 est réduit à $u_0(U^1)$ et $G/u_0(U^1)$ est donc un domaine hermitien symétrique M .

Le carré u_0^2 de u_0 se relève en

$$h_0: U^1 \rightarrow SL(V) : z \mapsto \text{multiplication par } z \quad (\text{rel. à } J_0).$$

Le groupe \underline{G}' de 1.4.4 est ici $GL(V)$.

L'application $x \mapsto h_x$ identifie M à un ensemble de structures de Hodge de type $\{(-1,0)(0,-1)\}$ sur V soit, ce qui revient au même (1.4.2) à un ensemble de structures complexes sur V . On note o le point de M qui définit h_0 et J_0 . On a

(a) M s'identifie à l'ensemble des structures complexes positives sur V

(b) La filtration de Hodge F définie par une structure complexe J

est caractérisée par

$$F^0(V) = \{ a + bi \mid a, b \in V, a + Jb = 0 \}.$$

On a $V^{0,-1} = F^0(V)$ et $V^{-1,0} = \bar{F}^0(V)$. Le domaine dual \check{M} de M est la

droite projective complexe de points les droites de $V_{\mathbb{C}}$, et le

plongement de Borel (1.4.6, 1.4.9) et $\alpha \mapsto F_{\alpha}^0(V)$.

Nous noterons $\check{M}_{\mathbb{R}}$ la droite projective réelle de points

les droites de $V_{\mathbb{C}}$ égales à leur conjuguée (i.e. complexifiées d'une droite de V).

Pour que $\alpha \in \check{M}$ définisse une structure de Hodge de type $\{(-1,0)(0,-1)\}$,

il faut et il suffit que $\alpha \notin \check{M}_{\mathbb{R}}$: pour α non réel, $\mathbb{C}_{\alpha}^0 V_{\mathbb{C}} = F_{\alpha}^0 \oplus \bar{F}_{\alpha}^0$. La

droite réelle $\check{M}_{\mathbb{R}}$ découpe dans la sphère de Riemann \check{M} deux demi-plans. L'un

correspond ~~aux~~ ~~structures~~ ~~complexes~~ ~~positives~~ et c'est M .

~~réflexes~~ L'autre, noté M^{-} , correspond aux structures complexes négatives.

3.2.2 Soit $\alpha \in \check{M}$, définissant une droite $X \subset V_{\mathbb{C}}$. Soit N

le radical unipotent du sous-groupe parabolique de $GL(V_{\mathbb{C}})$ qui

respecte X :

$$n \in N \Leftrightarrow (nX = X, \text{ et } n \text{ agit trivialement sur } X \text{ et } V_{\mathbb{C}}/X).$$

Les points $\gamma \neq \alpha$ de \check{M} forment un espace principal homogène sous N .

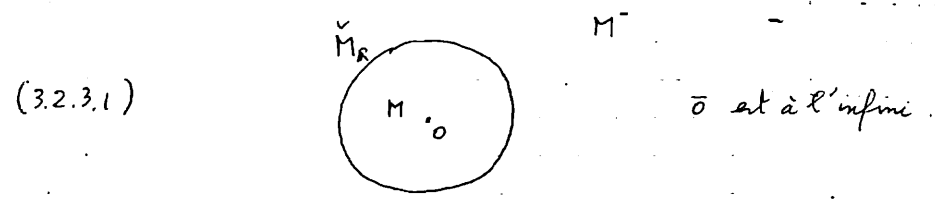
3.2.3. Soient $\alpha, \gamma \in M$, et $\bar{\gamma}$ défini par la droite $\bar{F}_{\gamma}^0(V)$. Alors, α et $\bar{\gamma}$

sont respectivement dans M et M^{-} . En particulier, $\alpha \neq \bar{\gamma}$. D'après

3.2.2, appliqué à $\bar{0}$ (ou plus généralement par $\alpha \neq \bar{0}$), pour $\alpha \in M$, il existe donc un et un seul élément $\gamma(\alpha) \in \bar{F}_{\alpha}^{-1}(g)$

tel que $\alpha = \exp(\gamma(\alpha)).0$.

Environ, eu en coordonnées. Soit e^+ un générateur de $F_0(V)$, et e^- son complexe conjugué. Dans la base (e^+, e^-) de V_G , $\bar{F}_0^{-1}(g)$ est l'ensemble des matrices $n_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), et l'image par $\exp(n_\lambda)$ de la droite $F^0(V)$ est engendrée par $e^+ + \lambda e^-$. Cette droite est réelle si et seulement si il existe μ tel que $e^+ + \lambda e^- = \mu (e^+ + \lambda e^-) = \mu (e^- + \bar{\lambda} e^+) = \bar{\lambda} \mu e^+ + \mu e^-$, ce qui implique $|\lambda| = 1$. Si,   l'aide de J , on identifie \check{M} au complété par un point de $\bar{F}_0^{-1}(g)$, et qu'on munit de $\bar{F}_0^{-1}(g)$ de la coordonnée λ , $\check{M}_R \subset \check{M}$ s'identifie donc à \mathbb{R} la circonférence $|\lambda| = 1$. L'intérieur $|\lambda| < 1$ de cette circonférence correspond à M (car $0 \in M$ correspond à $\lambda = 0$) et l'extérieur à M^- . Dans ce modèle de \check{M} , $\bar{F}_0^{-1}(G)$ agit par translations et $\bar{F}_0^0(G)$ par affinités; ~~il agit~~ par le stabilisateur K de o dans G agit par rotations.



3.2.4 Application : le plongement d'Harish-Chandra.

Soient M un domaine hermitien symétrique, G la composante neutre de son groupe d'automorphismes, $g = \mathfrak{h}_e(G)$, $o \in M$ et F la structure de Hodge correspondante de g_e . Les paraboliens $F^\circ(G)$ et $\bar{F}^\circ(G)$ sont opposés, et l'application

$$x \mapsto \exp(x) \cdot h_0$$

est un isomorphisme holomorphe de $\bar{F}^1(g)$ avec la grosse cellule de $\check{M} = G(\mathbb{C}) / F^\circ(G(\mathbb{C}))$.

Théorème 3.2.5 (Harish-Chandra) M est contenu dans la grosse cellule

de \check{M} . L'application \mathfrak{H}

$$J: M \rightarrow \bar{F}^1(g) : h \mapsto x \text{ tel que } h = \exp(x) h_0$$

identifie M à un ouvert borné de $\bar{F}^1(g)$.

Reprenons les notations de 3.1.1. Puisque $M = \exp(p) \cdot h_0$ et que p est réunion des $\mathfrak{H} h$ à h^{-1} ($h \in K$), il suffit de prouver que pour $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\exp(\alpha) \cdot h_0$ est dans la grosse cellule et que le x tel que $\exp(\alpha) \cdot h_0 = \exp(x) h_0$ est borné. Le théorème 3.1.1 ramène ce théorème au cas de $SL(2, \mathbb{R})$: on écrit

$$\alpha = d\varphi((0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

D'après l'étude faite de $SL(2, \mathbb{R})$, il existe $x_i \in \bar{F}^1(SL(2, \mathbb{R}))$ tel que

$$\exp(\alpha^{-1}) \exp(x_i) \in F^\circ(SL(2, \mathbb{C})),$$

avec $|x_i| < 1$ pour une norme convenable. On prend

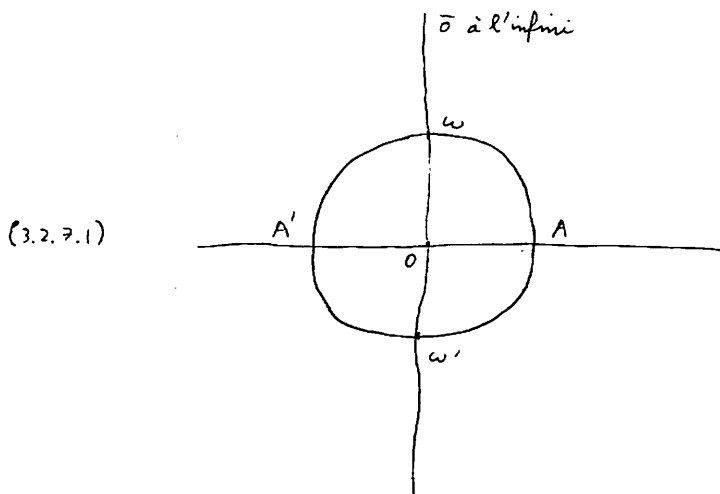
$$x = d\varphi((0, x_1, \dots, x_n))$$

Corollaire 3.2.6 Pour $x, y \in M$, les paraboliens $F_x^\circ(G)$ et $F_y^\circ(G)$ sont opposés

3.2.7 Reprenons les notations 3.2.1. Les filtrations de Cayley non triviales de G correspondent aux filtrations W de V telle que $G_c^W(V) \neq 0$ pour $c=0, -2$. Elles sont toutes conjuguées. Pour $x \in M$, la structure de Hodge mixte (V, F_x, W) est de type $\{(0,0), (-1,-1)\}$.

La droite $W_{-2}(V)$ définit un point $w \in \check{M}_{\mathbb{R}}$. Nous noterons w' son symétrique par rapport à o . On a $w' = h_o(\pm i)(w)$.

Reprenons la figure (3.2.3.1)



Sur la sphère ~~ambigüe~~ \check{M} , les trois circonférences (ou droites) (w', o, w, \bar{o}) , (o, A, \bar{o}, A') , (w', A, w, A') sont orthogonales.

Sur la sphère de Riemann ^S, deux configurations $C = (Y_1, Y_2, Y_3)$ formées de 3 circonférences orthogonales sont isomorphes. Par réduction à un cas standard, on en déduit que si $o \in Y_1 \cap Y_2$, il existe un unique groupe à un paramètre $\mathcal{G}(z)$ ($z \in U^1$) d'automorphismes ~~fixant~~ de S qui laissent stables $Y_1 \cap Y_2$ et Y_3 et agissent sur l'espace tangent en o par multiplication par z . On l'appelle le groupe des rotations autour de o .

Soit $\underline{c}' : U^1 \rightarrow G$ le groupe des rotations autour de A' (relatif aux trois circonférences (3.2.7.1)). On relie \underline{c}'^2 en $\underline{c} : U^1 \rightarrow G_{-1}$ et on pose $c = \underline{c}(e^{2\pi i/18})$. C' est la

Transformation de Cayley relative à o et W . Elle permute cycliquement w', o, w, \bar{o} , fixe A et A' et transforme M en le demi-plan ~~limité~~ limité par (A', o, A, \bar{o}) et contenant w .

3.2.8 D'après 3.2.2, $\check{M} - \{w\}$ est un espace principal homogène sous $W_{-2}(G_{\mathbb{C}})$. De même, $\check{M}_{\mathbb{R}} - \{w\}$ est principal homogène sous $W_{-2}(G)$.

Soit N l'élément de $W_{-2}(g)$ tel que $\exp(N)w' = A$

- Proposition 3.2.9 (i) $\exp(iN)w' = l_0$
 (ii) $M = \{ \exp(\lambda N) \cdot w' \mid \text{Im}(\lambda) > 0 \} = \{ \exp((\lambda - i)N) l_0 \mid \text{Im}(\lambda) > 0 \}$
 (iii) $M = \{ \exp(\lambda c(N)) \cdot l_0 \mid |\lambda| < 1 \}$

La transformation de Cayley transforme w en $\infty = l_0^{-1}$, et $\exp(N)$ en la translation qui amène l_0 en A . Elle transforme donc $\exp(iN)$ en la translation qui amène l_0 en w . Puisque c envoie w', l_0 sur l_0, w , (i) est prouvé.

Les autres assertions se vérifient de même.

Proposition 3.2.10. Soient (H, ρ) une représentation de G de poids α , ψ une polarisation de H , et W la filtration par le poids de H . Soit

$$P^{n+i} \subset G_{n+i}^W(H) \quad \text{le noyau de } N^i : G_{n+i}^W(H) \rightarrow G_{n-i}^W(H)$$

et notons encore ψ l'accouplement entre $G_{n+i}^W(H)$ et $G_{n-i}^W(H)$ déduit de ψ .

On a, pour $x \neq 0$ dans P^{n+i}

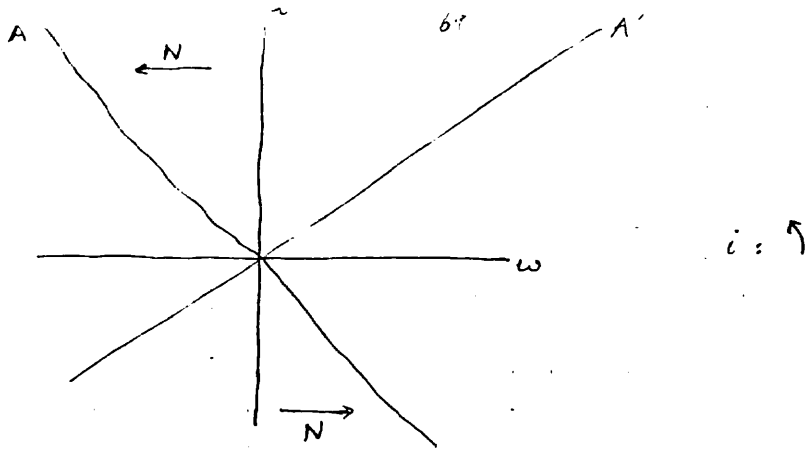
$$\psi(N^i x, x) > 0$$

Preuve. Prenons $H = V$. Que ψ soit une polarisation signifie alors que ψ est alternée et que

$$\psi(x, -J_0 x) > 0$$

pour J_0 la structure complexe définie par $o \in \mathfrak{m}$.

Puisque $l_0(e^{2\pi i/\epsilon})$ permute cycliquement (w, A', w', A) , les droites qui définissent w, A', w', A sont comme sur la figure ci-dessous et la translation (N) qui fixe w et envoie w' sur A , sont comme dans la figure suivante



L'assertion en résulte. Le cas général s'en déduit en prenant des produits tensoriels.

3.2.17 Variante. Partons du groupe $\underline{G}_1 = U^1 \times SL(2, \mathbb{R})$. Soient $h^{USL} : U^1 \rightarrow \underline{G}'$ comme en [ref], $w^{USL} : \underline{G}_m \rightarrow \underline{G}'_1$ comme en [ref], \underline{G}' comme en [ref], $h_0 : \underline{S} \rightarrow \underline{G}'$ déduit de h^{USL} comme en [ref], et $w' : \underline{G}_m \rightarrow \underline{G}'$ déduit de w^{USL} comme en [ref].

Pour toute représentation (H, ρ) de \underline{G}' , $\rho \circ h_0$ est une structure de Hodge sur H . ~~Soit W la filtration croissante définie par $\rho \circ h_0$. Alors, (H, ρ, h)~~ Soient F_0 la filtration de Hodge, et W la filtration croissante définie par $\rho \circ w'$. Alors, (H, F_0, W) est de Hodge mixte ; ceci résulte aisément du critère.

Le morphisme $\rho \circ w'$ définit non seulement W , mais encore une graduation de H , d'où un isomorphisme de H avec $Gr^W(H)$. Via cet isomorphisme, la structure de Hodge de $Gr^W_i(H)$ est définie par l'action du facteur U_1 de \underline{G}_1 . On note c l'opérateur de Weil $h(-i)$ sur $Gr^W(H)$; c'est $\rho((-i, c))$.

Soit $N \in W_{-2}(SL(2, \mathbb{R}))$ comme en [ref], relatif à h^{SL} et w . Gardons les notations de [ref]. Si Ψ est une polarisation de H , on a encore

$$\Psi(N^i \alpha, c\alpha) > 0 \quad \text{pour } \alpha \in P^{n+i}, \alpha \neq 0.$$

3.3 Transformation de Cayley

3.3.1 Soient M un domaine hermitien symétrique, G la composante neutre de son groupe d'automorphismes et W une filtration de Cayley.

Choisissons $o \in M$ et soit $w: G_m \rightarrow G$ le morphisme qui définit W et tel que $\sigma w = w$ ($\sigma = \text{ad } h_o(\pm i)$). Soit

$$\varphi_W: U_1 \times SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow G$$

comme en

Appliquons les résultats de 3.2 au groupe $SL(2, \mathbb{R})$, muni de h_o^{SL} et de w^{SL} . Soient $c \in SL(2, \mathbb{R})$ la transformation de Cayley, et $N \in W_{-2}^{SL}(SL(2, \mathbb{R}))$ comme en

Le parabolique $W_o^\circ(G)$ a pour sous-groupe de Levi le centralisateur Z de w , et la décomposition $\mathfrak{g}^\circ = \mathfrak{g}_t^{\circ} \oplus \mathfrak{g}_h^{\circ}$ se décompose en une inogéné $Z_t^\circ \times Z_h^\circ \rightarrow Z$. La décomposition $\mathfrak{g}^{\text{par}} = \mathfrak{g}_t^{\text{par}} \oplus \mathfrak{g}_h^{\text{par}}$ se décompose de même en une inogéné $Z_t^{\text{par}} \times Z_h^{\text{par}} \rightarrow G^{\text{par}}$. Le morphisme φ_W se relève à $Z_t^{\text{par}} \times Z_h^{\text{par}}$ et il envoie U_1 dans Z_h^{par} et $SL(2, \mathbb{R})$ dans Z_t^{par} . On note Z (resp. $Z(\mathbb{R})$) l'interaction de Z (resp. $Z(\mathbb{R})$) avec G .

3.3.2 Puisque $W_o^\circ(G)$ est parabolique et K (le centralisateur de $o \in M$) compact maximal, on a $W_o^\circ(G) \cdot K = G$. Ainsi On a aussi $W_o^\circ(G) \cap K = \{1\}$ et $W_o^\circ(G) \cap \sigma(W_o^\circ(G)) \cap K = Z \cap K$, de sorte que $g \mapsto g \cdot o$ identifie M à $W_o^\circ(G) / (Z \cap K)$.

Lemme 3.3.3. Le point $c \cdot 0 = \exp(-iN) \cdot 0$ de \check{M} est fixe sous Z_t^* .

Sur \mathfrak{g}_t^* , g_t , la filtration F et W sont d'édites de \mathfrak{h}^{sl} et \mathfrak{w}^{sl} via la représentation adjointe de $SL(2, \mathbb{R})$. En effet, g_t commute à $\varphi_w(U_1)$. D'après 3.2, on a donc sur g_t

$$c^{-1}(F) = \exp(-iN)(F) = \sigma(W)$$

Puisque 0 est fixe sous $F^\circ(\mathfrak{g}_t)$, $c \cdot 0$ est fixe sous $\sigma(W^\circ(g_t))$, et en particulier est fixe sous g_t° .

Pour $g \in Z_t$, on a donc

$$\begin{aligned} g \cdot 0 &= g \cdot \exp(iN) \cdot \exp(-iN) \cdot 0 = \exp(i \operatorname{ad}g(N)) g \exp(-iN) \cdot 0 \\ &= \exp(i \operatorname{ad}g(N)) \cdot \exp(-iN) \cdot 0 \\ &= \exp(i \operatorname{ad}g(N) - iN) \cdot 0 \end{aligned}$$

En particulier, le sous-groupe compact maximal $Z_t \cap K$ de Z_t est le centralisateur de N dans la représentation adjointe de Z_t sur $W_{-2}(g)$.

Lemme 3.3.4 La Z_t -orbite de N est ouverte.

En tout que représentation de $SL(2, \mathbb{R})$, g_t est somme de h représentations adjointes et de l représentations triviales (h et l convenable).

$Z_t \cap K$ est l'intersection des centralisateurs de w et N , donc le centralisateur de $SL(2, \mathbb{R})$. On a donc $\dim(Z_t \cap K) = l$. Par ailleurs, $W_{-2}(g) = g_t^{-2}$ est de $\dim h$ et de $\dim l$.

et $\dim g_t^\circ = h + l$. On a donc

$$\dim(W_{-2}(g)) = \dim(Z_t) - \dim(Z_t \cap K)$$

et 3.3.4 en résulte.

image dans $W_0(G)/W_{-1}(G)$ et même dans Z_k , d'où un morphisme

$$h_{\pi}(x) : U^1 \rightarrow Z_k$$

Le domaine M_{∞} ^{est identifié à} l'ensemble des conjugués de ce morphisme,

et $x \mapsto h_{\pi}(x)$ à la projection de M sur M_{∞}

2^{ème} description Soient \underline{G}_1 et \underline{G}' comme en 3.3.7. Pour V

une représentation ρ de \underline{G}' , de noyau fini en tout que représentation de ρ de \underline{G}_1 , M s'identifie à un espace de structures de Hodge sur V . Le

gradué $G_W(V)$ est une représentation de ρ de $W_0(\underline{G}')/W_{-1}(\underline{G}')$, et

la structure de Hodge $G_W(F_x)$ sur $G_W(V)$ ($x \in M$) est définie

par $h_{\pi}(x)$: l'application $\pi : M \rightarrow M_{\infty}$ s'identifie à l'application qui à la filtration de Hodge F_x de V ($x \in M$) associe la filtration de

Hodge $G_W(F_x)$ de $G_W(V)$. Cette description met en

évidence que π est holomorphe.

3.3.8 Posons

$$M(W) = W_{-1}(G_C). M \subset M^*$$

Dans la description ci-dessus, c'est l'ensemble des filtrations

F sur V , conjugués sous $\underline{G}(C)$ à une ^{filtration F_x ($x \in M$)} ~~élément~~ de M , et induisant

sur $G_W(V)$ la même filtration qu'une ~~élément~~ filtration F_x convenable.

L'application π se prolonge en

$$\pi : M(W) \rightarrow M_{\infty}$$

et π fait de $M(W)$ un fibré en espaces homogènes sous $W_{-1}(G_C)$.

La stabilisateur dans $W_{-1}(G_C)$ de $x \in M(W)$ est le sous-groupe

$$\mathfrak{g} \cap W_{-1}(G_C) \cap F^0(G_C)$$

d'algèbre de Lie ~~de $W_{-1}(G_C)$~~ $F^0(W_{-1}(G_C))$.

3.3.9 Posons $M(W)' = M(W) / W_{-2}(g_C)$, d'où une factorisation de π :

$$M(W) \xrightarrow{\pi_2} M(W)' \xrightarrow{\pi_1} M(\infty)$$

Pour $x \in M(W)$, l'intersection $M \cap \pi_1^{-1}(x)$ l'image de $F^0(G_{-1}^{-1}(g))$ de $F^0(W_{-1}^{-1}(g))$ dans $W_{-1}(g) / W_{-2}(g)$ ne dépend que de $\pi_1(x)$. La projection π_1 fait donc de $M(W)'$ un espace fibre principal homogène sous le groupe $G_{-1}^W(g_C) / F_{\pi_1(x)}^0(G_{-1}^W(g_C))$ sur $M(\infty)$, de groupe $G_{-1}^W(g_C) / F_{\pi_1(x)}^0(G_{-1}^W(g_C))$.

La projection π_2 fait de $M(W)$ un fibre principal homogène sur $M(W)'$, de groupe $W_{-2}^{\#}(g_C)$. Pour chaque $y \in M(W)'$, l'intersection $M \cap \pi_2^{-1}(y)$ est un translate de $W_{-2}(g) + iC$.

Pour chaque $x \in M(\infty)$, $G_{-1}^W(g)$ est muni d'une structure de Hodge, en particulier d'un opérateur $h_x(-i)$.

Théorème 3.3.10 Pour $u \in G_{-1}^W(g)$, on a

$$[u, h_x(-i)u] \in -\bar{C}$$

Le crochet n'est nul que si $u=0$.

Nous allons utiliser σ , et le fait que $-B$ est une polarisation de g . On peut supposer que $x = \pi(0)$, On a alors :

$$-B([N, \sigma u], h_{\pi(0)}(-i) \sigma u) > 0 \quad \text{pour } u \neq 0, \text{ soit}$$

$$-B(N, \sigma [u, h_{\pi(0)}(-i)u]) > 0$$

Corollaire 3.3.11. $W_{-2}(g)$ est le centre de $W_{-1}(g)$.

3.3 Domaines tubes

3.3.1. Soit M un domaine hermitien symétrique ^{simple} de rang r et G la composante neutre du groupe de ses automorphismes.

On garde les notations de 1.3.2, 1.3.5 (avec $G' = G$), 3.1.2 et

3.1.13. \underline{G} est le groupe algébrique réel d'adjoint d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On note ~~le~~ D le diagramme de Dynkin ~~de~~ de \underline{G} . ~~de~~ \underline{G} est une forme intérieure de sa forme compacte, l'involutoire la conjugaison complexe agit sur D par l'involutoire d'opposition. Les morphismes $h_x : U^1 \rightarrow G$ se prolongent en morphismes $G_{\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}$. Comme expliqué en ~~la~~, la classe de conjugaison de ceux-ci définit un sommet ~~de~~ e de D .

Proposition 3.3.2 Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) e est stable sous l'involutoire d'opposition de D , se h et h^{-1} ~~de~~ sont conjugués dans $G(\mathbb{C})$.
- (ii) $\underline{G}(\mathbb{R})$ est ~~bi~~ bi-composé.
- (iii) $\varphi|_{U_1}$ est trivial;
- (iv) $Gr_{\pm 1}^{W_2}(\text{Lie}(G)) = 0$;
- (v) le système de racines relatif de G est de type C .

L'équivalence de (i) et (ii) résulte de l'énoncé plus précis suivant.

Proposition 3.3.3. ~~Les~~ h_x et h_x^{-1} ne sont pas conjugués sous G ~~par~~ ~~la~~ ~~représentation~~ ~~de~~ (V, ρ) de G , ~~pour~~
 (ce résultat plus précis sera prouvé en ~~la~~)

a) dans le cas (i) \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^{-1} sont conjugués dans $G(\mathbb{C})$,
Réponse (ii) Si \mathfrak{e} n'est pas fixe sous l'involution d'opposition,
 $G(\mathbb{R})$ est connexe.

(ii) Si \mathfrak{e} est fixe sous l'involution d'opposition, $G(\mathbb{R})$ a deux
 composantes connexes. Les éléments de ~~$G(\mathbb{R})$~~ ^(la composante non neutre) transforment
 \mathfrak{h} en un G -conjugué de \mathfrak{h}^{-1} .

Rappelons qu'un groupe algébrique ^{linéaire} réel \underline{K} est dit compact
 si $\underline{K}(\mathbb{R})$ est compact et que chaque composante connexe de $\underline{K}(\mathbb{C})$ a
 un point réel.

Nous ferons usage des faits suivants

a) $\underline{K} \rightarrow \underline{K}(\mathbb{R})$ est une équivalence de catégorie des groupes de Lie compacts
 des ^(linéaires) ~~des~~ groupes algébriques réels compacts ~~et des~~ ^{des} points réels ~~et des~~ ^{des} points réels dans chaque composante connexe

b) Si l'involution σ du groupe algébrique ^{réductif connexe} réel \underline{G} induit sur $\mathfrak{lie}(\underline{G})$ une
 involution de Cartan, alors ^{\mathfrak{h}} sous-groupe algébrique \underline{K} de \underline{G} des points fixes
 de σ est compact, et $\underline{K}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\underline{G}(\mathbb{R})$.

En particulier, $\pi_0(\underline{K}) \cong \pi_0(\underline{G}(\mathbb{R}))$.

Soit \underline{K}' le centralisateur de $\mathfrak{h}(-i)$ dans \underline{G} . \underline{K}' est compact, et $\underline{K}'(\mathbb{R})$ est
 un sous-groupe compact maximal de $\underline{G}(\mathbb{R})$.

~~Rappelons que $\mathfrak{h}(-i)$ est une involution de Cartan, le~~
~~centralisateur \underline{K}' de $\mathfrak{h}(-i)$ dans $\underline{G}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact~~
~~maximal, ~~et~~ \underline{K}' ~~est~~ le centralisateur de \mathfrak{h} dans $\underline{G}(\mathbb{R})$.~~ Puisque \underline{K}'
 normalise le centre de \underline{G} , $\mathfrak{h} \in \underline{K}'$ fixe \mathfrak{h} ou conjugue \mathfrak{h} en \mathfrak{h}^{-1} .

$= \underline{K}'(\mathbb{R})^\circ$

Le centralisateur de \mathfrak{h} est ~~connexe~~ dans \underline{G} et est connexe, en tant
 que ~~centralisateur~~ centralisateur d'un tore. Le centralisateur de \mathfrak{h} dans $\underline{G}(\mathbb{R})$ en est une
 forme compacte, donc est également connexe; c'est \underline{K} .

\mathfrak{h} et \mathfrak{h}^{-1} sont conjugués dans $G(\mathbb{C})$ si et seulement si \mathfrak{e} est fixe
 sous l'involution d'opposition. Dès lors :

Remarque 3.3.5 On vérifie en 3.1.3 que, pour $s \neq 0, 2$, on n'a jamais

$$G_{\pm 1}^{W_s}(\text{he}(G)) = 0 \quad ||$$

Remarque 3.3.6 Soit $Z \in \mathfrak{g}$ un générateur infinitésimal de $\mathfrak{k}(U')$.

Les conditions de 3.2 équivalent encore à

(vi) Z est contenu dans une sous-algèbre simple^s de rang 3 de \mathfrak{g} .

Il est clair que (iii) \Rightarrow (vi). Admettons (vi). La sous-algèbre \mathfrak{s} est stable sous σ . Elle ne peut être dans \mathfrak{k} , car Z y serait central. Il existe donc $x \neq 0$ ~~$x \in \mathfrak{s}$~~ dans $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{p}$. On peut supposer par conjugaison que $x \in \mathfrak{a}$. On a alors $Z = \lambda \cdot [x, Jx]$, d'où $Z \in [\mathfrak{a}, J\mathfrak{a}] \subset d\mathfrak{q}(SL(2, \mathbb{R})^2)$, d'où (iii).

~~3.7 Supposons que M vérifie les conditions équivalentes de~~

~~3.2. Il existe alors~~

$$\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow G$$

~~tel que~~

~~a) Soit $h_0 : U^1 \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) : e^{i\theta} \mapsto$ rotation d'angle θ . Alors,~~

$$\mathfrak{k} = \varphi \mathfrak{k}_0$$

~~b) Soit $w_0 : \mathbb{C}^* \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) : \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Alors, ~~la~~~~

~~filtration W_2 de G , est définie par φw_0 .~~

$$\varphi(-1) = e$$

Dans la fin de ce n^o, nous gardons les notations précédentes (et abandonnerons celles de 1.3.2), à cela près que W_2 sera simplement noté W . Nous noterons \mathfrak{g}^i la graduation de \mathfrak{g} définie par φw_0 .

~~Le sous-algèbre nilpotente $W_{-2}(G)$ du parabolique $W_0(G)$ est commutative, identifiée par l'exponentielle à $W_{-2}(\text{he}(G))$. Le quotient~~

3. 7. Lorsque les conditions équivalentes de sont
 vérifiées, le théorème fournit un isomorphisme entre
 M et le domaine tube $W_{-2}(g) + iC \subset W_{-2}(g_C)$.

74

4 Quotients

4.1. Remarques générales

4.1.1 Soient M un domaine hermitien symétrique, G son groupe d'automorphismes et $\Gamma \subset G$ un ~~non~~ groupe arithmétique. On s'intéresse au cas où G/Γ est pas compact. Il existe alors groupe ^{semi-simple} ~~réductif~~ $G_{\mathbb{Q}}$ sur \mathbb{Q} , et un isomorphisme de G avec ~~le~~ $G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ le groupe dérivé de $G_{\mathbb{Q}}$ par extension des scalaires à \mathbb{R} , tel que Γ soit commensurable à $G(\mathbb{Z})$

(par une quelconque structure entière sur $G_{\mathbb{Q}}$). Nous supposons dans ce qui suit que $G_{\mathbb{Q}}$ est \mathbb{Q} -simple.

4.1.2 Je ne connais pas de démonstration a priori des faits suivants, qui se vérifient ~~aisément~~ par inspection des diagrammes de ~~Dynkin~~ Dynkin.

(a) Si $P_{\mathbb{Q}}$ est un parabolique maximal de $G_{\mathbb{Q}}$, alors $P_{\mathbb{R}}$ est un produit de sous-groupe paraboliques maximaux des facteurs simples de G . En particulier, $P_{\mathbb{R}}$ correspond à une filtration de Cayley W .

(b) La décomposition $P_{\mathbb{R}}/R_u(P_{\mathbb{R}})$ isogène à $\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_t$ de est définie sur \mathbb{Q} .

4.1.3. Fixons $P_{\mathbb{Q}}$ comme ci-dessus. Soient

$$\Gamma_P = \Gamma \cap P(\mathbb{R})$$

$$\Gamma_P^1 = \text{Ker}(\Gamma_P \rightarrow \mathbb{Z}_t)$$

Le quotient ~~est~~ ~~une~~ $M(W)/\Gamma_P^1$

est sans doute toujours de façon ~~obvious~~ naturelle une variété algébrique ^(cf. le cas univalent). On a en tout cas

a) M_∞ / Γ_p^1 , quotient du domaine hermitien symétrique M_∞ par le groupe arithmétique image de Γ_p^1 dans Z_L , est une variété algébrique. Supposons Γ assez petit pour que Γ_p^1 agisse ~~librement~~ Γ_p^1 librement sur M_∞ . On a alors :

b) $M(W)' / \Gamma_p^1$ est un espace fibré sur M_∞ / Γ_p^1 . C'est un ~~espace~~ fibre principal homogène sous le fibré en tore complexes

$$G_{-1}^W(\Gamma) \backslash G_{-1}^W(g) / F_y^0(G_{-1}^W(g))$$

(F_y^0 fonction holomorphe de y dans M_∞). Le dernier est polarisable ~~(W-algèbre)~~ : d'après , toute forme linéaire rationnelle sur $W_{-2}(g)$, positive sur \bar{C} , définit une polarisation. C'est donc un schéma abélien.

~~$$M(W)'$$~~

Pour munir $M(W)' / \Gamma_p^1$ d'une structure algébrique, il suffit de d'en construire une multisection; celle-ci définit une trivialisation d'une puissance de l'espace homogène considéré. On en construit comme suit

a) On prend $w : G_m \rightarrow G_{\mathbb{Q}}$ qui définit W

b) On prend $o \in M$, tel que $\mathfrak{h}_o(\mathfrak{h}_o) \text{ ad } \mathfrak{h}_o(-i)(w) = w^{-1}$.

Le théorème met alors en évidence une application

$$M_\infty / \Gamma_p^1 \text{ centralisateur de } w \rightarrow \del{M(W)'} M(W) / \Gamma_p^1$$

qui définit ~~la~~ la multisection voulue.

c) $M(W)^*/\Gamma_p$ est un fibré sur $M(W)'/\Gamma_p$, espace principal
homogène sous un fibré en tores (= produit de G_m). Ici,
définir la structure algébrique pose un problème que je n'ai pas
résolu.

4.2: Exemple Siegel

4.2.1. Soient $H_{\mathbb{Z}}$ un \mathbb{Z} -module libre de rang $2g$ et Ψ une forme alternée de discriminant un sur $H_{\mathbb{Z}}$. Soit M l'espace des structures de Hodge de type $\{(-1,0), (0,-1)\}$ sur $H_{\mathbb{Z}}$, dont Ψ soit une polarisation. C'est encore l'ensemble de structures complexes T sur $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$, telles que $\Psi_{\mathbb{R}}$ soit la partie

~~la~~ Ψ

imaginaire d'une forme hermitienne définie positive ()
 le quotient $M / Sp(H_{\mathbb{Z}})$ est l'espace des modules des variétés abéliennes polarisées de la série principale.

4.2.2. Les filtrations par le poids à considérer sont ici définies par les filtrations isotrope de $H_{\mathbb{Z}}$ de la forme

$$\{0\} \subset W_{-2}(H_{\mathbb{Z}}) \subset W_{-1}(H_{\mathbb{Z}}) \subset H_{\mathbb{Z}}$$

(avec W_{-2} et W_{-1} orthogonaux l'un de l'autre). Ecrivons W et posons V

$$\dim Gr_{-1}^W(H_{\mathbb{Z}}) = 2g.$$

4.2.3 La forme Ψ induit sur $Gr_{-1}^W(H_{\mathbb{Z}})$ une forme alternée de discriminant un $\bar{\Psi}$. On a ici

a) M_{∞} est l'espace des structures de Hodge de type $\{(-1,0), (0,-1)\}$ sur $Gr_{-1}^W(H_{\mathbb{Z}})$, dont $\bar{\Psi}$ soit une polarisation

b) $M(W)$ est l'espace des sous-espace isotrope maximaux F° de $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ tels que $(H_{\mathbb{Z}}, F, W)$ soit une structure de Hodge mixte et que $\bar{\Psi}$ soit une polarisation de $Gr_{-1}^W(F)$.

~~(extension de A par $(Y @ E_m)$)~~

Le système (K, φ) est déterminé par les données suivantes

- (a) le schéma abélien principalement polarisé $(A, \bar{\varphi})$;
- (b) l'application $X^* \xrightarrow{\delta} A$ (dérivée de $X^* \rightarrow G$). Cette application définit l'extension G de $A \cong_{\bar{\varphi}} A^*$ par $T = \frac{\text{Hom}(X, E_m)}{H @ E_m}$;
- (c) le relèvement $X^* \xrightarrow{\tilde{\delta}} G$ de δ ; ce relèvement est assujéti à vérifier une condition de symétrie. Pour $\tilde{\delta}_0$ un relèvement permis, les autres relèvements permis s'écrivent $\tilde{\delta}_0 \cdot s$ pour

$$s : X^* \longrightarrow \text{Hom}(X, E_m)$$

défini par une forme bilinéaire symétrique sur X^* à valeurs dans E_m .

4.2.6 Les objets $(A, \bar{\varphi}, \delta, \tilde{\delta})$ de 4.2.5 sont de nature purement algébrique, et $M(W)/\Gamma$ est, dans le cadre analytique, leur espace grossier de modules. Leur espace grossier de module, sur \mathbb{C} , est une variété algébrique sur \mathbb{C} admettant $M(W)/\Gamma$ comme ensemble de points complexes.

4.2.7 Le dérivage est lui aussi algébrique :

(a) L'application π est

$$\pi : M(W)/\Gamma \longrightarrow (\text{le schéma grossier de modules des schémas abéliens principalement polarisés de dimension } g_0)$$

$$(A, \bar{\varphi}, \delta, \tilde{\delta}) \longmapsto A, \text{ avec polarisation } (A, \bar{\varphi})$$

(b) Le quotient $(M(W)'/\Gamma)$ classifie les $(A, \bar{\varphi}, \delta)$ et π_1 est $(A, \bar{\varphi}, \delta, \tilde{\delta}) \longrightarrow (A, \bar{\varphi}, \delta)$.

4.2.8 Le groupe $GL(X)$ agit sur $M(W)/\Gamma$ par

kampat de structure, via son action sur X : $\sigma \in GL(X)$ agit par

$$(A, \bar{\varphi}, \delta, \tilde{\delta}) \mapsto (A, \bar{\varphi}, \delta \sigma^{-1}, \tilde{\delta} \sigma^{-1}).$$